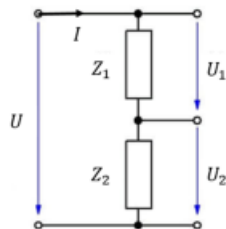


SEMINARUL 5: PROBLEME LA CARE SE SOLICITĂ SOLUȚIA COMPLETĂ

Exemplele de aplicații pe care le vom aborda de acum înainte, unele mai simple, iar altele mai complexe, vor fi rezolvate complet.

DIVIZOR DE TENSIUNE



Notăm cu I curentul din circuit, care străbate cele două impedanțe.

Se notează cu U tensiunea pe întreaga grupare serie, și cu U_1 , respectiv U_2 , tensiunile la bornele celor două impedanțe.

Vom avea:

$$U = I \cdot (Z_1 + Z_2)$$
$$U_1 = I \cdot Z_1$$

Obținem

$$\frac{U_1}{U} = \frac{I \cdot Z_1}{I \cdot (Z_1 + Z_2)} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow U_1 = U \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Similar, din

$$U = I \cdot (Z_1 + Z_2)$$
$$U_2 = I \cdot Z_2$$

se obține

$$\frac{U_2}{U} = \frac{I \cdot Z_2}{I \cdot (Z_1 + Z_2)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow U_2 = U \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

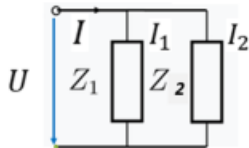
Reținem, așadar, relațiile

$$U_1 = U \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$U_2 = U \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Pentru că am văzut, la unii dintre dumneavoastră, ușoare ezitări când am vorbit despre divizorul de tensiune la rezolvarea unei probleme, haideți să ne aducem aminte ce reprezintă acesta. Circuitul este cel figurat.

DIVIZOR DE CURENT



Căderea de tensiune la bornele grupării paralel se notează cu U .
Se notează cu I curentul din circuit, care străbate gruparea paralel,
și cu I_1 , respectiv I_2 , curenții care străbat separat cele două
impedanțe.

Impedanța echivalentă pentru gruparea paralel are valoarea:

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \Rightarrow Z_p = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Vom avea

$$U = I_1 Z_1 = I_2 \cdot Z_2 = I \cdot Z_p = I \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Din

$$I_1 Z_1 = I \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow I_1 = I \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

iar din

$$I_2 Z_2 = I \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow I_2 = I \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

Reținem, așadar, relațiile:

$$I_1 = I \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Foarte util în rezolvarea unor probleme poate să fie și divizorul de curent, nu atât de frecvent utilizat precum divizorul de tensiune, dar suficient de important. Să ne amintim ce reprezintă. Circuitul este cel figurat.

TRANSFORMATĂ LAPLACE

Instrument matematic utilizat în analiza circuitelor

Argument: ecuațiile diferențiale / integrale, care descriu bobinele și condensatorii, sunt mult mai simplu de exprimat în domeniul Laplace decât în domeniul timp.

În cazul rezistorului de rezistență R:

- în domeniul timp: $u(t) = Ri(t)$ sau $i(t) = \frac{1}{R}u(t)$
- în domeniul Laplace: $U(s) = RI(s)$ sau $I(s) = \frac{1}{R}U(s)$

În cazul bobinei de inductanță L:

- în domeniul timp: $U(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ sau $i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$
- în domeniul Laplace: $U(s) = sLI(s)$, respectiv $I(s) = \frac{1}{sL}U(s)$

În cazul condensatorului de capacitate C:

- în domeniul timp: $u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$ sau $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$
- în domeniul Laplace: $U(s) = \frac{1}{sC}I(s)$, respectiv $I(s) = sC U(s)$

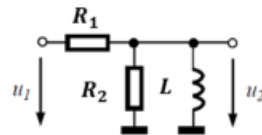
Ne vom aminti acum câteva lucruri importante privind utilizarea transformatei Laplace în circuitele cu rezistoare, bobine și condensatori.

PROBLEMA 1

Să se determine funcția de transfer

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$

corespunzătoare circuitului din figură?



REZOLVARE

Folosim transformata Laplace în analiza circuitului.

Funcția de transfer în cazul acestui circuit este

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$

Grupării paralele, pe care se culege semnalul de ieșire, îi va corespunde impedanța

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow Z_p = \frac{sL \cdot R_2}{sL + R_2}$$

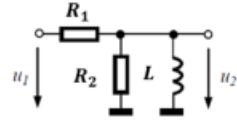
Considerând divizorul de tensiune format în circuit, putem scrie

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot \frac{Z_p}{R_1 + Z_p}$$

Așadar funcția de transfer are valoarea

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_p}{R_1 + Z_p} = \frac{\frac{sL \cdot R_2}{sL + R_2}}{R_1 + \frac{sL \cdot R_2}{sL + R_2}} = \frac{sLR_2}{sL(R_1 + R_2) + R_1R_2}$$

Funcția de transfer este adimensională, fiind raport de tensiuni.

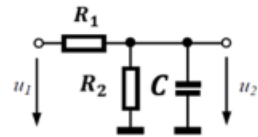


PROBLEMA 2

Să se determine funcția de transfer

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$

corespunzătoare circuitului din figură?



REZOLVARE

Folosim transformata Laplace în analiza circuitului.

Funcția de transfer în cazul acestui circuit este

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$

Grupării paralel, pe care se culege semnalul de ieșire, îi va corespunde impedanța

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{\frac{1}{sC}} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow Z_p = \frac{\frac{1}{sC} \cdot R_2}{\frac{1}{sC} + R_2} = \frac{R_2}{1 + sCR_2}$$

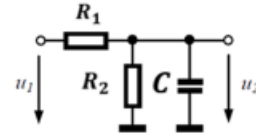
Considerând divizorul de tensiune format în circuit, putem scrie

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot \frac{Z_p}{R_1 + Z_p}$$

Așadar funcția de transfer are valoarea

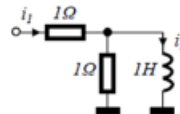
$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_p}{R_1 + Z_p} = \frac{\frac{R_2}{1 + sCR_2}}{R_1 + \frac{R_2}{1 + sCR_2}} = \frac{R_2}{sCR_1R_2 + R_1 + R_2}$$

Funcția de transfer este adimensională, fiind raport de tensiuni.



PROBLEMA 3

Să se determine funcția de transfer corespunzătoare circuitului din figură?



REZOLVARE:

Notăm $R = 1\Omega$ și $L = 1H$.

Funcția de transfer, în acest caz, este dată de raportul

$$H(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)}.$$

Deoarece avem de a face cu un divizor de curent, deducem imediat că

$$I_2(s) = I_1(s) \cdot \frac{R}{R + sL} = I_1(s) \cdot \frac{1}{1 + s}$$

Așadar

$$H(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{1}{1 + s}$$

PROBLEMA 4

Să se determine funcția de transfer corespunzătoare circuitului din figură.

REZOLVARE:

Notăm $R = 1\Omega$ și $L = 1H$.

Funcția de transfer, în acest caz o impedanță, este dată de raportul

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)}.$$

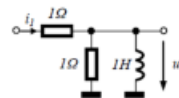
METODA 1

Deoarece avem de a face cu un divizor de curent, deducem imediat că curentul care trece, spre exemplu, prin bobină este dat de

$$I_2(s) = I_1(s) \cdot \frac{R}{R + sL} = I_1(s) \cdot \frac{1}{1 + s}$$

Tensiunea la bornele bobinei este deci:

$$U_2(s) = I_2(s) \cdot sL = I_1(s) \cdot \frac{1}{1 + s} \cdot s \cdot 1 = I_1(s) \cdot \frac{s}{s + 1} \Rightarrow H(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)} = \frac{s}{s + 1}$$

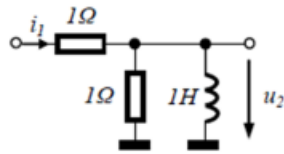


Deoarece avem de a face cu un divizor de curent, deducem imediat că curentul care trece, spre exemplu, prin bobină este dat de

$$I_2(s) = I_1(s) \cdot \frac{R}{R + sL} = I_1(s) \cdot \frac{1}{1 + s}$$

Tensiunea la bornele bobinei este deci:

$$U_2(s) = I_2(s) \cdot sL = I_1(s) \cdot \frac{1}{1 + s} \cdot s \cdot 1 = I_1(s) \cdot \frac{s}{s + 1} \Rightarrow H(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)} = \frac{s}{s + 1}$$



METODA 2

Păstrăm notațiile $R = 1\Omega$ și $L = 1H$.

Pentru gruparea paralel avem

$$Z_p = \frac{sL \cdot R}{sL + R} = \frac{s}{s + 1}$$

Obținem imediat că

$$U_2(s) = I_1(s) \cdot Z_p = I_1(s) \cdot \frac{s}{s + 1} \Rightarrow H(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)} = \frac{s}{s + 1}$$

PROBLEMA 5

Să se determine funcția de transfer corespunzătoare circuitului din figură.

REZOLVARE:

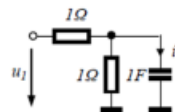
Notăm $R = 1\Omega$ și $C = 1F$.

Funcția de transfer, în acest caz o admitanță, este dată de raportul

$$H(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)}.$$

Grupării paralele îi va corespunde impedanța

$$Z_p = \frac{\frac{1}{sC} \cdot R}{\frac{1}{sC} + R} = \frac{R}{1 + sCR} = \frac{1}{s + 1}$$



Din divizorul de tensiune obținem

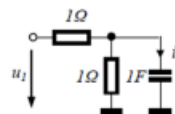
$$U_2(s) = U_1(s) \cdot \frac{Z_p}{R + Z_p} = U_1(s) \cdot \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = U_1(s) \cdot \frac{1}{s+2}$$

Însă:

$$U_2(s) = I_2(s) \cdot \frac{1}{sC} = I_2(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Așadar, din cele două relații, obținem egalitatea

$$U_1(s) \cdot \frac{1}{s+2} = I_2(s) \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow H(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s}{s+2}$$



SCURTĂ PREZENTARE: SISTEME CU REACȚIE

Reacția – este un procedeu, o tehnică prin care comportamentul și proprietățile unui sistem sunt influențate de ieșirea sistemului.

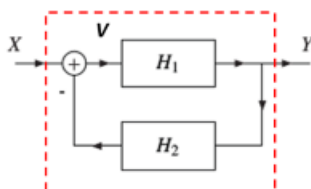
Folosind reacția se va transmite înapoi către intrare un semnal proporțional cu cel de ieșire.

Așadar, efectul (răspunsul sistemului), care este produs de o cauză (adică de excitația de pe intrarea sistemului), influențează acțiunea ulterioară a cauzei.

Reacția poate fi:

1. **negativă**: atunci când ceea ce se aduce de la ieșire spre intrare slăbește efectul excitației → se folosește pentru a obține efect de **stabilizare**
2. **pozitivă**: atunci când ceea ce se aduce de la ieșire spre intrare întărește efectul excitației → în general se obține efect de **destabilizare**

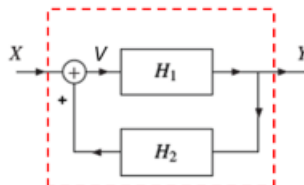
CAZUL 1: Sistem cu reacție negativă



$$\begin{aligned} V(s) &= X(s) - H_2(s) \cdot Y(s) \\ Y(s) &= H_1(s) \cdot V(s) = H_1(s) \cdot [X(s) - H_2(s) \cdot Y(s)] = H_1(s) \cdot X(s) - H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot Y(s) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y(s)[1 + H_1(s) \cdot H_2(s)] = H_1(s) \cdot X(s) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) \cdot H_2(s)}$$

CAZUL 2: Sistem cu reacție pozitivă



$$\begin{aligned} V(s) &= X(s) + H_2(s) \cdot Y(s) \\ Y(s) &= H_1(s) \cdot V(s) = H_1(s) \cdot [X(s) + H_2(s) \cdot Y(s)] = H_1(s) \cdot X(s) + H_1(s) \cdot H_2(s) \cdot Y(s) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow Y(s)[1 - H_1(s) \cdot H_2(s)] = H_1(s) \cdot X(s) \Leftrightarrow \end{aligned}$$

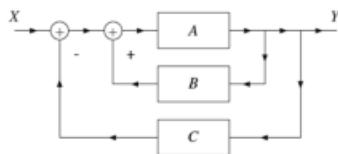
$$\Leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s) \cdot H_2(s)}$$

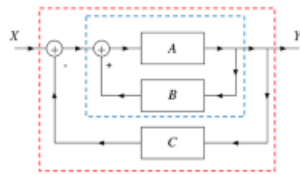
PROBLEMA 6

Se consideră sistemul SALIT din figură, unde transformatele Laplace ale intrării și ieșirii sunt notate cu X , respectiv Y .

Fiecare dintre subsistemele componente se identifică prin funcția sa de transfer: A , C .

Să se determine funcția de transfer, $H(s)$, a întregului sistem, funcție de $A(s)$, $B(s)$ și $C(s)$.





REZOLVARE:

Pentru sistemul format din subsistemele A și B , marcat în dreptunghiul de culoare albastră, funcția de transfer corespunzătoare este

$$H_{AB}(s) = \frac{A(s)}{1 - A(s) \cdot B(s)}.$$

(A se vedea funcția de transfer din cazul sistemului cu reacție pozitivă.)

Pentru întreg sistemul, marcat prin dreptunghiul de culoare roșie, funcția de transfer este:

$$H(s) = \frac{H_{AB}(s)}{1 + H_{AB}(s) \cdot C(s)} = \frac{\frac{A(s)}{1 - A(s) \cdot B(s)}}{1 + \frac{A(s)}{1 - A(s) \cdot B(s)} \cdot C(s)} = \frac{A(s)}{1 + A(s) \cdot [C(s) - B(s)]}.$$

(A se vedea funcția de transfer din cazul sistemului cu reacție negativă.)

PROBLEMA 7

Se consideră SALIT-ul cauzal din figură, unde transformatele Laplace ale intrării și ieșirii sunt notate cu X , respectiv Y . Fiecare dintre subsistemele cauzale componente se identifică prin funcția proprie de transfer: A, B, C .

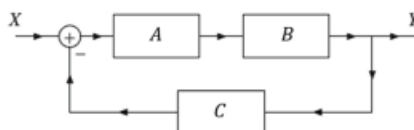
Se consideră:

$$A(s) = as + 3, \text{ unde } a \text{ este o constantă reală}$$

$$B(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = 1$$

- a) Se cere să se determine funcția de transfer, $H(s)$, a întregului sistem, specificând și regiunea de convergență RC
- b) Determinați pentru ce valori ale parametrului a sistemul este BIBO – stabil.



Ținând cont de faptul că avem de a face cu un sistem cu reacție negativă

REZOLVARE:

$$A(s) = as + 3$$

$$B(s) = \frac{1}{s}$$

$$C(s) = 1$$

$$\begin{aligned} H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} &= \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) \cdot H_2(s)} = \frac{A(s)B(s)}{1 + A(s)B(s)C(s)} = \\ &= \frac{(as + 3) \cdot \frac{1}{s}}{1 + (as + 3) \cdot \frac{1}{s} \cdot 1} = \frac{as + 3}{(a + 1)s + 3} \end{aligned}$$

Cum SALIT este cauzal, este necesar ca RC pentru funcția de transfer să coincidă cu semiplanul din dreapta al polului cel mai din dreapta a acestei funcții. Funcția de transfer are, însă, un unic pol

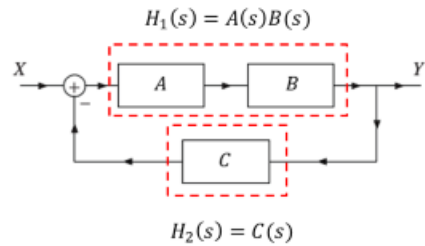
$$s = -\frac{3}{a + 1}.$$

Condiția devine:

$$\operatorname{Re}(s) > -\frac{3}{a + 1}.$$

Știm că avem asigurată BIBO-stabilitatea sistemului dacă și numai dacă toți polii sunt plasați în semiplanul complex stâng, adică strict în stânga axei imaginare. Cum avem un unic pol, totul se reduce la a impune ca

$$-\frac{3}{a + 1} < 0 \Leftrightarrow a + 1 > 0 \Leftrightarrow a > -1$$



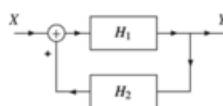
PROBLEMA 8

În cazul sistemului cu reacție din figură, obținut prin interconectarea a două SALIT cauzale ce au funcțiile de transfer

$$H_1(s) = \frac{1}{s^2 + as + (a - 2)}, \text{ unde } a \text{ este o constantă reală, respectiv } H_2(s) = -1,$$

se cere să se determine:

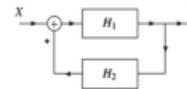
1. Funcția de transfer a întreg sistemului, specificând și regiunea de convergență RC corespunzătoare
2. Valorile parametrului a pentru care sistemul este BIBO - stabil.



REZOLVARE:

1. Fără dificultate se stabilește că

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 - H_1(s) \cdot H_2(s)} = \frac{\frac{1}{s^2 + as + (a-2)}}{1 + \frac{1}{s^2 + as + (a-2)}} = \frac{1}{s^2 + as + (a-1)}.$$



Polii funcției de transfer, adică rădăcinile numitorului, se calculează cu ușurință, fiind vorba de o ecuație de gradul al II-lea, și se obțin valorile -1 și $(1-a)$.

Se obține, așadar, că

$$H(s) = \frac{1}{s^2 + as + (a-1)} = \frac{1}{(s+1) \cdot (s+a-1)}$$

Ținând cont de cauzalitate, regiunea de convergență RC este semiplanul din dreapta polului cel mai din dreapta și se stabilește funcție de valoarea lui a .

- Dacă $(1-a) \leq -1$, adică pentru $a \geq 2$, polul cel mai din dreapta este -1 , iar regiunea de convergență RC corespunde lui $Re(s) > -1$.
- Dacă $(1-a) > -1$, adică pentru $a < 2$, polul cel mai din dreapta este $(1-a)$, iar regiunea de convergență corespunde lui $Re(s) > 1-a$.

2. Având de a face cu un sistem cauzal, sistemul va fi BIBO-stabil dacă și numai dacă polii sunt plasați în semiplanul complex stâng, adică strict în stânga axei imaginare.

Primul dintre ei, -1 , îndeplinește condiția, pe când celui de-al doilea trebuie să-i impunem ca

$$1-a < 0 \Leftrightarrow a > 1$$

PROBLEMA 9

Un SALIT cauzal, de intrare x și ieșire y , este caracterizat prin ecuația diferențială liniară cu coeficienți constanți

$$y'(t) + 3y(t) = 2x(t).$$

Determinați răspunsul la impuls, $h(t)$, al sistemului.

REZOLVARE:

$$y'(t) + 3y(t) = 2x(t)$$

Aplicând transformata Laplace în ambii membri ai ecuației diferențiale se obține:

$$sY(s) + 3Y(s) = 2X(s) \Leftrightarrow Y(s) \cdot (s + 3) = 2X(s) \Leftrightarrow \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s + 3}$$

Rezultă, așadar, funcția de transfer a sistemului:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2}{s + 3}.$$

Cum SALIT este cauzal, este necesar ca regiunea de convergență corespunzătoare funcției de transfer a sistemului să coincidă cu semiplanul din dreapta polului cel mai din dreapta al acesteia.

Singurul pol este $s = -3$ și prin urmare avem

$$RC: \operatorname{Re}(s) > -3.$$

Din tabelul cu transformate Laplace uzuale avem imediat că unei funcții de transfer de acest tip, cu regiunea de convergență specificată, îi va corespunde în domeniul timp

$$h(t) = 2e^{-3t}u(t).$$

$x(t)$	$X(s)$	RC
$\delta(t)$	1	s
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\operatorname{Re}\{s\} < 0$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
$-t^n u(-t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\operatorname{Re}\{s\} < 0$
$e^{-at} u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$
$-e^{-at} u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\operatorname{Re}\{s\} < -a$
$t^n e^{-at} u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$
$-t^n e^{-at} u(-t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\operatorname{Re}\{s\} < -a$
$[\cos \omega_0 t] u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
$[\sin \omega_0 t] u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > 0$
$[e^{-at} \cos \omega_0 t] u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$
$[e^{-at} \sin \omega_0 t] u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\operatorname{Re}\{s\} > -a$