

SEMINARUL 3

15 PROBLEME TIP GRILĂ

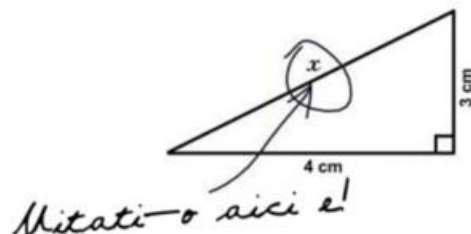
5 PROBLEME CU REZOLVARE COMPLETĂ



VOM INSISTA !

Iată ce ne propunem să facem astăzi, ca aplicații la materia parcursă până în prezent.

Se dă un triunghi dreptunghic cu latura $a=4$ cm,
 $b=3$ cm. Gasiți latura notată x .



Vom rezolva în prima parte a întâlnirii noastre câteva probleme simple. Cam de tipul celei din figură. Poate nici nu atât de complicate...

PROBLEMA TIP GRILĂ 1

Suma a două semnale periodice de perioade diferite este și el un semnal periodic doar dacă frecvențele fundamentale ale celor două semnale periodice:

- A. sunt egale.
- B. sunt într-un raport irațional.
- ☒ C. sunt într-un raport rațional.
- D. nu există nici o relație între cele două frecvențe fundamentale, deoarece suma a două semnale periodice de perioade diferite nu poate fi un semnal periodic.

SLIDE 1

Să ne aducem aminte care era condiția de îndeplinit în cazul sumei mai multor semnale periodice de perioade diferite.

PROBLEMA TIP GRILĂ 2

Modificarea componentei continue a unui semnal periodic are ca efect:

- A. modificarea formei semnalului.
- ☒ B. modificarea poziției semnalului în lungul ordonatei, fără afectarea formei.
- C. modificarea formei semnalului și a poziției sale în lungul ordonatei.
- D. modificarea poziției semnalului în lungul abscisei, fără afectarea formei.

SLIDE 2

Gândiți-vă ce se întâmplă cu reprezentarea grafică a semnalului când avem componentă continuă.

PROBLEMA TIP GRILĂ 3

Mărirea perioadei unui semnal are ca efect:

- ☒ A. îndesirea liniilor spectrale.
- ☐ B. rărirea liniilor spectrale.
- ☒ C. micșorarea amplitudinilor liniilor spectrale.
- ☐ D. mărirea amplitudinilor liniilor spectrale.

SLIDE 3

- A. Când se mărește perioada, se micșorează valoarea frecvenței fundamentale, care este inversul perioadei. Prin urmare scade intervalul dintre componente în reprezentarea în domeniul frecvență și liniile spectrale se îndesesc.
- C. În calculul amplitudinii apare și $1/T$. Odată cu creșterea lui T se micșorează amplitudinea.

PROBLEMA TIP GRILĂ 4

Relația de calcul în domeniul frecvență a puterii unui semnal este:

A. $\int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) dt$

☒ B. $A_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2$

C. $\frac{1}{T} \sum_{n=0}^{\infty} A_n^2$

D. $\int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$

PROBLEMA TIP GRILĂ 5

Prin derivarea unui semnal periodic, componenta continuă:

- A. nu este afectată.
- B. este transmisă în avans.
- ☒ C. este eliminată.
- D. este transmisă în întârziere.

PROBLEMA TIP GRILĂ 6

Prin derivarea unui semnal periodic:

- ☒ A. sunt avantajate componentele de înaltă frecvență.
- ☐ B. sunt avantajate componentele de joasă frecvență.
- ☐ C. sunt avantajate toate componentele, derivarea fiind un procedeu liniar.
- ☐ D. nu este avantajată nici o componentă, derivarea fiind un procedeu neliniar.

Teorema derivării

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \leftrightarrow (j\omega_0 n) \cdot A_{nc} = (j2\pi n f_0) \cdot A_{nc}$$

PROBLEMA TIP GRILĂ 7

În cazul integrării unui semnal periodic, amplitudinile componentelor:

- A. sunt avansate cu un interval direct proporțional cu ordinul armonicii.
- ☒ B. sunt multiplicare cu un factor invers proporțional cu ordinul armonicii.
- C. sunt întârziate cu un interval invers proporțional cu ordinul armonicii.
- D. sunt multiplicare cu un factor direct proporțional cu ordinul armonicii.

Teorema integrării

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \leftrightarrow \frac{1}{j2\pi n f_0} \cdot A_{nc}$$

SLIDE 7

PROBLEMA TIP GRILĂ 8

Frecvența fundamentală a semnalului:

$$x(t) = -1.4 \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(280\pi t - \frac{\pi}{4}\right) + 2.6 \cos(160\pi t)$$

este:

A. 200 Hz
C. 20 Hz

B. 40 Hz
D. 160 Hz

SLIDE 8

Se calculează cel mai mare divizor comun pentru frecvențele celor trei armonici, respectiv pentru 100, 140 și 80. Acesta va fi 20, iar răspunsul este C.

PROBLEMA TIP GRILĂ 9

Perioada semnalului:

$$x(t) = -1.4 \cos\left(4 \cdot 10^4 \pi t - \frac{\pi}{2}\right) - 11 \cos(8 \cdot 10^4 \pi t) + 15 \cos(10^5 \pi t)$$

este:

A. 0.05 ms
C. 0.5 ms

☒ B. 0.1 ms
D. 0.02 ms

Pulsațiile sunt $2\pi \cdot 2 \cdot 10^4$, $2\pi \cdot 4 \cdot 10^4$ și $2\pi \cdot 5 \cdot 10^4$, măsurate în rad/s.

Cel mai mare divizor comun pentru 2, 4 și 5 este 1.

Frecvența fundamentalei este $1 \cdot 10^4$ Hz, adică o perioadă de 0,1 ms.

SLIDE 9

Pulsațiile sunt $2\pi \cdot 2 \cdot 10^4$, $2\pi \cdot 4 \cdot 10^4$ și $2\pi \cdot 5 \cdot 10^4$, măsurate în rad/s. Se calculează cel mai mare divizor comun pentru : 2, 4, 5. Acesta este 1. Prin urmare frecvența fundamentalei este 10^4 Hz. Aceasta conduce la o perioadă de 0,1 ms.

PROBLEMA TIP GRILĂ 10

Semnalul $x(t) = 3 + 5 \cos\left(200\pi t + \frac{\pi}{4}\right) - 8 \cos\left(150\pi t - \frac{\pi}{6}\right)$ conține:

- ☒ A. armonica a treia, armonica a patra și componenta continuă.
- ☐ B. fundamentală, armonica a treia și armonica a patra.
- ☐ C. componenta continuă, fundamentală și armonica a doua.
- ☐ D. armonica a doua, armonica a treia și componenta continuă.

$$\begin{array}{lll} 2\pi f_1 = 200\pi & 2\pi f_2 = 150\pi & f_0 = 5^2 = 25 \text{ (Hz)} \\ f_1 = 100 = 2^2 \cdot 5^2 \text{ (Hz)} & f_2 = 75 = 3 \cdot 5^2 \text{ (Hz)} & f_1 = 4f_0 \text{ și } f_2 = 3f_0 \end{array}$$

SLIDE 10

Fără dificultate observăm că în cazul primei componente sinusoidale avem $2\pi f_1 = 200\pi$. Deci $f_1 = 100 = 2^2 \cdot 5^2 \text{ (Hz)}$.

În mod similar, pentru a doua componentă sinusoidală se va obține că $2\pi f_2 = 150\pi$. Deci $f_2 = 75 = 3 \cdot 5^2 \text{ (Hz)}$.

Cel mai mare divizor comun, corespunzător frecvenței fundamentalei, va fi $f_0 = 5^2 = 25 \text{ (Hz)}$. Așadar $f_1 = 4f_0$ și $f_2 = 3f_0$, ce corespund la a patra armonică și a treia armonică. La acestea se adaugă componenta continuă și răspunsul corect este A.

PROBLEMA TIP GRILĂ 11

Știind că semnalul $x(t) = 2.2 \cos(a\pi t) + 1.5 \cos\left(b\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ de perioadă 4 ms conține armonicile 3 și 5, atunci a și b au respectiv valorile:

A. 750; 1250

B. 3000; 5000

C. 1200; 2000

D. 2500; 1500

Perioada de 4 ms duce la o frecvență fundamentală de $\frac{1}{4} \text{ ms} = 1000/4 \text{ Hz} = 250 \text{ Hz}$.

Dacă prima componentă armonică corespunde la armonica a 3-a, iar cea de a doua la armonica a 5-a, va rezulta $a = 2 \cdot 3 \cdot 250 = 1500$ și $b = 2 \cdot 5 \cdot 250 = 2500$

Dacă prima componentă armonică corespunde la armonica a 5-a, iar cea de a doua la armonica a 3-a, va rezulta $a = 2500$ și $b = 1500$.

SLIDE 11

Perioada de 4 ms presupune o frecvență fundamentală de $\frac{1}{4} \text{ ms} = 1000/4 \text{ Hz} = 250 \text{ Hz}$.

Dacă prima componentă armonică corespunde la armonica a 3-a, iar cea de a doua la armonica a 5-a, va rezulta $a=1500$ și $b=2500$, iar dacă prima componentă armonică corespunde la armonica a 5-a, iar cea de a doua la armonica a 3-a, va rezulta $a=2500$ și $b=1500$. Cel de al doilea caz este cel corect și varianta valabilă de răspuns este D.

PROBLEMA TIP GRILĂ 12

Puterea semnalului $x(t) = 2 \cdot \cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{2}\right) - 3 \cdot \cos\left(202\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ [V]
are valoarea:

A. 13 W
C. 6.5 mW

☒ B. 6.5 W
D. 12 W

$$P = \frac{1}{2}(2^2 + 3^2) = 6,5 \text{ W}$$

SLIDE 12

Nu există componentă continuă. Așadar puterea semnalului este

$P = \frac{1}{2}(2^2 + 3^2) = 6,5 \text{ W}$. Răspunsul este B.

PROBLEMA TIP GRILĂ 13

Curentul: $x(t) = 2 \cdot \cos\left(2\pi 100t + \frac{\pi}{2}\right) - 3 \cdot \cos\left(202\pi t - \frac{\pi}{2}\right)$ [mA]

dezvoltă într-o rezistență de $1\text{ k}\Omega$ o putere egală cu:

A. 13 W
☒ C. $6,5\text{ mW}$

B. $6,5\text{ W}$
 D. 12 W

$$P = \frac{1}{2} \cdot (2^2 \cdot 10^{-6} + 3^2 \cdot 10^{-6}) = 6,5 \cdot 10^{-6}\text{ W}$$

$$6,5\text{ mW}$$

SLIDE 13

Expresia analitică a semnalului este exact aceeași ca la problema anterioară. Diferă, însă, mărimea fizică pe care o reprezintă.

Amplitudinile armonicilor au valorile de $2 \cdot 10^{-3}\text{ A}$ și $3 \cdot 10^{-3}\text{ A}$. Puterea de semnal se calculează direct și se obține

$$P = \frac{1}{2} \cdot (2^2 \cdot 10^{-6} + 3^2 \cdot 10^{-6}) = 6,5 \cdot 10^{-6}\text{ W}.$$

Aceasta este, conform definiției, puterea dezvoltată pe o rezistență de 1Ω .

Pentru a găsi puterea dezvoltată pe o rezistență de $1\text{ k}\Omega$ vom înmulți valoarea de putere găsită cu 10^3 . Rezultatul final va fi $6,5 \cdot 10^{-3}\text{ W} = 6,5\text{ mW}$. Prin urmare răspunsul corect este C.

Printre răspunsurile date era și cel de $6,5\text{ W}$. Dacă nu suntem atenți la unitățile de măsură utilizate, se poate greși.

PROBLEMA TIP GRILĂ 14

Energia semnalului $x(t) = \sqrt{6} \cdot t$ pe intervalul $1 \text{ ms} < t < 3 \text{ ms}$ este:

☒ A. 52 nJ

B. $4\sqrt{6} \mu\text{J}$

C. $28 \mu\text{J}$

D. $14\sqrt{6} \text{ pJ}$

$$w = \int_{t_1}^{t_2} x^2(t) dt = \int_{10^{-3}}^{3 \cdot 10^{-3}} 6t^2 dt = 6 \cdot \frac{t^3}{3} \bigg|_{10^{-3}}^{3 \cdot 10^{-3}} = 52 \cdot 10^{-9} \text{ J}$$

PROBLEMA TIP GRILĂ 15

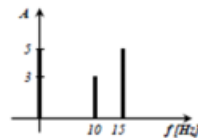
Se consideră spectrul semnalului $x(t)$ ilustrat în figură și se cer amplitudinile liniilor spectrale, în ordinea crescătoare a frecvențelor, pentru derivata $x'(t)$ a semnalului.

A. $5\pi; 60\pi; 150\pi$

B. $0; 30\pi; 75\pi$

C. $0; 60\pi; 150\pi$

D. $75\pi; 30\pi; 75\pi$



Teorema derivării

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} \leftrightarrow (j\omega_0 n) \cdot A_{nc} = (j2\pi n f_0) \cdot A_{nc}$$

$$|j2\pi f_0 n| \cdot |A_{nc}| = 2\pi f_0 n \cdot |A_{nc}|$$

$$2\pi \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 60\pi \text{ și } 2\pi \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 150\pi$$

$$10 = 2 \cdot 5 \text{ Hz} = f_2$$

$$15 = 3 \cdot 5 \text{ Hz} = f_3$$

$$f_0 = 5 \text{ Hz}$$

SLIDE 15

Să ne reamintim teorema derivării.

Modulul amplitudinii componentelor spectrale ale derivatei va fi

$$|j2\pi f_0 n| \cdot |A_{nc}| = 2\pi f_0 n \cdot |A_{nc}|$$

Semnalul are o componentă continuă și două armonici, de frecvențe $10 = 2 \cdot 5$ Hz și $15 = 3 \cdot 5$ Hz, a căror cel mai mare divizor comun este frecvența fundamentală de 5 Hz. Așadar avem de a face cu a doua și a treia armonică.

Amplitudinile componentelor spectrale ale derivatei vor fi $2\pi \cdot 5 \cdot 2 \cdot 3 = 60\pi$ și $2\pi \cdot 5 \cdot 3 \cdot 5 = 150\pi$. Componenta continuă prin derivare se anulează.

Răspunsul corect este C.

PROBLEMA 1

Se consideră semnalul:

$$x(t) = 1 + 2 \cos\left(k\pi t - \frac{\pi}{5}\right) + 3 \cos\left(2400\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

- (a) Determinați parametrul k astfel încât spectrul semnalului să conțină armonica a treia și armonica a patra.
- (b) Pentru k determinat la punctul (a), determinați perioada semnalului și reprezentați spectrul său bilateral.

Cazul 1:

$$x(t) = 1 + 2 \cos\left(k\pi t - \frac{\pi}{5}\right) + 3 \cos\left(2400\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Dacă primul termen în cosinus din expresia lui $x(t)$ este cea de-a treia armonică, vom avea:

$$k\pi = 3 \cdot \omega_0 = 3 \cdot 2\pi f_0$$

În acest caz, al doilea termen în cosinus din expresia lui $x(t)$ este cea de-a patra armonică și vom avea:

$$2400\pi = 4 \cdot \omega_0 = 4 \cdot 2\pi f_0$$

$$\Rightarrow f_0 = 300 \text{ Hz}$$

Se obține imediat, din prima egalitate, că:

$$k = 1800$$

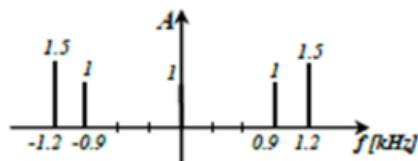
Perioada în acest caz este:

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{300} \text{ s} = \frac{1000}{300} \text{ ms} = 3,33 \text{ ms}$$

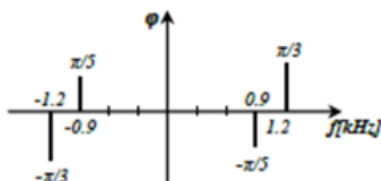
Frecvența celei de-a treia armonici este $3f_0 = 900 \text{ Hz} = 0,9 \text{ kHz}$, iar a celei de-a patra este $4f_0 = 1200 \text{ Hz} = 1,2 \text{ kHz}$.

Spectrul bilateral de frecvențe în primul caz

Spectrul bilateral de amplitudini



Spectrul bilateral de faze



Cazul 2:

$$x(t) = 1 + 2 \cos\left(k\pi t - \frac{\pi}{5}\right) + 3 \cos\left(2400\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$$

Dacă primul termen în cosinus din expresia lui $x(t)$ este cea de-a patra armonică, vom avea:

$$k\pi = 4 \cdot \omega_0 = 4 \cdot 2\pi f_0$$

În acest caz, al doilea termen în cosinus din expresia lui $x(t)$ este cea de-a treia armonică și vom avea:

$$2400\pi = 3 \cdot \omega_0 = 3 \cdot 2\pi f_0$$

$$\Rightarrow f_0 = 400 \text{ Hz}$$

Se obține imediat, din prima egalitate, că:

$$k = 3200$$

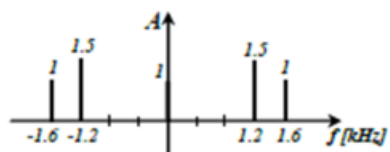
Perioada în acest caz este:

$$T = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{400} \text{ s} = \frac{1000}{400} \text{ ms} = 2,5 \text{ ms}$$

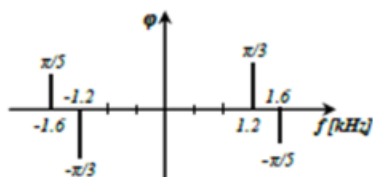
Frecvența celei de-a treia armonici este $3f_0 = 1200 \text{ Hz} = 1,2 \text{ kHz}$, iar a celei de-a patra este $4f_0 = 1600 \text{ Hz} = 1,6 \text{ kHz}$.

Spectrul bilateral de frecvențe în al doilea caz

Spectrul bilateral de amplitudini



Spectrul bilateral de faze



PROBLEMA 2

Fie semnalul periodic cu perioada 10 ms :

$$x(t) = -0.7 \cos\left(4a\pi t + \frac{\pi}{6}\right) - 1.4 \cos\left(2b\pi t - \frac{\pi}{3}\right).$$

- (a) Determinați a și b astfel încât spectrul semnalului să conțină fundamentală și armonica a 4-a.
- (b) Pentru a și b având valorile determinate la punctul (a), reprezentați spectrul semnalului.

Înainte de toate vom „aduce” amplitudinile la valori pozitive și fazele inițiale în intervalul $[-\pi, \pi]$, așa cum am convenit.

$$x(t) = -0,7 \cos\left(4a\pi t + \frac{\pi}{6}\right) - 1,4 \cos\left(2b\pi t - \frac{\pi}{3}\right)$$

Ținem cont de faptul că:

$$-\cos \alpha = \cos(\alpha + \pi),$$

deoarece:

$$\cos(\alpha + \pi) = \cos \alpha \cos \pi - \sin \alpha \sin \pi = \cos \alpha \cdot (-1) - \sin \alpha \cdot 0 = -\cos \alpha.$$

Avem:

$$x(t) = 0,7 \cos\left(4a\pi t + \frac{\pi}{6} + \pi\right) + 1,4 \cos\left(2b\pi t - \frac{\pi}{3} + \pi\right)$$

$$x(t) = 0,7 \cos\left(4a\pi t + \frac{7\pi}{6}\right) + 1,4 \cos\left(2b\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Observăm că:

$$\frac{7\pi}{6} \notin [-\pi, \pi]; \quad \frac{2\pi}{3} \in [-\pi, \pi].$$

Pentru a avea faza inițială în intervalul convenit, ne bazăm pe 2π - periodicitatea funcției cosinus.

Cosinusul lui: $\left(4a\pi t + \frac{7\pi}{6}\right)$ va fi același cu cosinusul lui:

$$4a\pi t + \frac{7\pi}{6} - 2\pi = 4a\pi t - \frac{5\pi}{6},$$

și în plus avem:

$$-\frac{5\pi}{6} \in [-\pi, \pi].$$

Semnalul a fost rescris sub forma convenabilă:

$$x(t) = 0,7 \cos\left(4a\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) + 1,4 \cos\left(2b\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Avem

$$T = 10 \text{ ms} \Rightarrow f_0 = \frac{1}{T} = \frac{1}{10 \cdot 10^{-3}} = 100 \text{ Hz}$$

Cazul 1

Dacă prima componentă cosinusoidală este fundamentală, iar a doua este armonică a patra, vom avea:

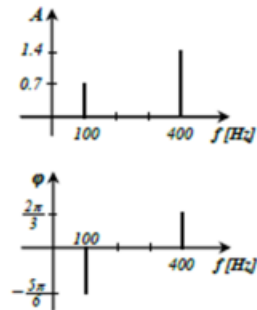
$$4a\pi = 2\pi \cdot f_0 = 200\pi \Rightarrow a = 50$$

$$2b\pi = 2\pi \cdot 4f_0 = 800\pi \Rightarrow b = 400$$

Semnalul se va scrie sub forma

$$x(t) = 0,7 \cos\left(2\pi \cdot 100t - \frac{5\pi}{6}\right) + 1,4 \cos\left(2\pi \cdot 400t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Spectrul de amplitudini și spectrul de faze arată ca în figură:



Cazul 2

Dacă prima componentă cosinusoidală este armonica a patra, iar a doua este fundamentală, vom avea:

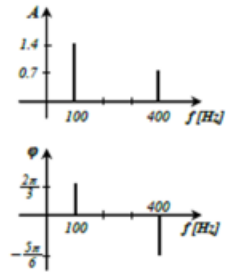
$$4a\pi = 2\pi \cdot 4f_0 = 800\pi \Rightarrow a = 200$$

$$2b\pi = 2\pi \cdot f_0 = 200\pi \Rightarrow b = 100$$

Semnalul se va scrie sub forma

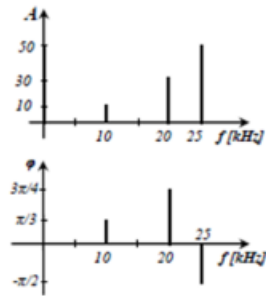
$$x(t) = 0,7 \cos\left(2\pi \cdot 400\pi t - \frac{5\pi}{6}\right) + 1,4 \cos\left(2\pi \cdot 100\pi t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

Spectrul de amplitudini și spectrul de faze arată ca în figură:



PROBLEMA 3

Să se determine spectrul de amplitudini și spectrul de faze pentru semnalul derivat $x'(t)$, dacă sunt date spectrul de amplitudini și spectrul de faze pentru semnalul $x(t)$.



Teorema derivării pentru semnalele periodice în timp continuu ne furnizează valorile absolute ale noilor coeficienți complecși și noile faze inițiale:

$$A_{ncd} = (j2\pi n f_0) A_{nc}$$

$$|A_{ncd}| = (2\pi n f_0) |A_{nc}|$$

$$\varphi_{ncd} = \varphi_{nc} + \frac{\pi}{2}$$

Să observăm că $\frac{\pi}{2}$ apare datorită înmulțirii în prima relație cu $j = e^{j\frac{\pi}{2}} = \cos\frac{\pi}{2} + j\sin\frac{\pi}{2}$.

$$e^{j\varphi_{nc}} \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} = e^{j(\varphi_{nc} + \frac{\pi}{2})}$$

$$A_{ncd} = (j2\pi n f_0) \cdot |A_{nc}| \cdot e^{j\varphi_{nc}} = (2\pi n f_0) \cdot |A_{nc}| \cdot e^{j\frac{\pi}{2}} \cdot e^{j\varphi_{nc}} = \boxed{(2\pi n f_0) \cdot |A_{nc}|} \cdot e^{j(\varphi_{nc} + \frac{\pi}{2})}$$

Determinăm pentru început frecvența armonicii fundamentale.
Folosind spectrul de amplitudini observăm că:

$$f_0 = (10, 20, 25) = (2 \cdot 5, 2^2 \cdot 5, 5 \cdot 5) = 5 \text{ kHz}$$

Componentele spectrale sunt la:

$$10 \text{ kHz} = 2f_0, 20 \text{ kHz} = 4f_0, 25 \text{ kHz} = 5f_0$$

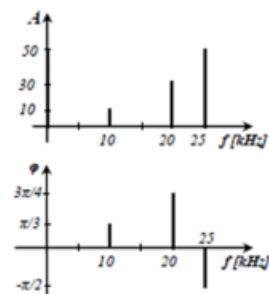
și corespund armonicilor a 2-a, a 4-a și a 5-a.

Modulele amplitudinilor și fazele inițiale pentru semnalul inițial $x(t)$ sunt:

$$|A_{2c}| = 10, \varphi_{2c} = \frac{\pi}{3}$$

$$|A_{4c}| = 30, \varphi_{4c} = \frac{3\pi}{4}$$

$$|A_{5c}| = 50, \varphi_{5c} = -\frac{\pi}{2}$$



Modulele amplitudinilor pentru semnalul derivat $x'(t)$ vor fi:

$$|A_{2cd}| = 2\pi \cdot 2 \cdot f_0 \cdot |A_{2c}| = 2\pi \cdot 10^5$$

$$|A_{4cd}| = 2\pi \cdot 4 \cdot f_0 \cdot |A_{4c}| = 12\pi \cdot 10^5$$

$$|A_{5cd}| = 2\pi \cdot 5 \cdot f_0 \cdot |A_{5c}| = 25\pi \cdot 10^5$$

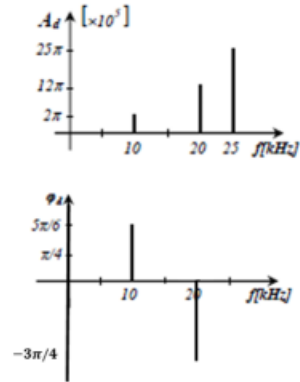
Fazele inițiale pentru semnalul derivat $x'(t)$ vor fi:

$$\varphi_{2cd} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{6} \in [-\pi, \pi]$$

$$\varphi_{4cd} = \frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{4} \notin [-\pi, \pi] \rightarrow -2\pi + \frac{5\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} \in [-\pi, \pi]$$

$$\varphi_{5cd} = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 0 \in [-\pi, \pi]$$

Suntem acum în măsură să reprezentăm spectrul de amplitudini și spectrul de faze pentru semnalul derivat.



PROBLEMA 4

Să se determine coeficienții A_{nc} ai SFE pentru semnalul dat prin

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(3\omega_0 t) + C \cos(5\omega_0 t + \varphi)$$

SLIDE 29

Practic, semnalul ne este dat deja sub forma SFA.

Trecerea de la SFA la SFE se face folosind scrierea funcțiilor trigonometrice cosinus și sinus cu ajutorul exponențialei complexe, așa cum am procedat și la curs pentru cazul general.

Reamintim scrierea funcțiilor cosinus și sinus cu ajutorul exponențialei complexe

Relația lui Euler:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j \sin(-\theta) = \cos \theta - j \sin \theta$$

Adunarea relațiilor, membru cu membru, ne va conduce la:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

Scăderea relațiilor, membru cu membru, ne va furniza relația:

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

SLIDE 30

Folosind relația lui Euler, despre care am mai discutat în recapitularea cunoștințelor acumulate la orele de trigonometrie, se pot obține exprimări cu ajutorul exponențialei complexe pentru funcțiile trigonometrice cosinus și sinus.

REZOLVARE:

Semnalul dat este

$$x(t) = A \sin(\omega_0 t) + B \cos(3\omega_0 t) + C \cos(5\omega_0 t + \varphi)$$

După folosirea formulelor reamintite anterior, acesta devine:

$$x(t) = A \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j} + B \frac{e^{-j3\omega_0 t} + e^{j3\omega_0 t}}{2} + C \frac{e^{-j(5\omega_0 t + \varphi)} + e^{j(5\omega_0 t + \varphi)}}{2}$$

Ordonarea termenilor ne conduce la:

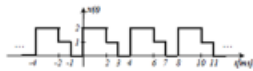
$$x(t) = \frac{1}{2}C \cdot e^{-j\varphi} \cdot e^{-j5\omega_0 t} + \frac{1}{2}B \cdot e^{-j3\omega_0 t} + \left(-\frac{1}{2j}A\right) \cdot e^{-j\omega_0 t} + \frac{1}{2j}A \cdot e^{j\omega_0 t} + \frac{1}{2}B \cdot e^{j3\omega_0 t} + \frac{1}{2}C \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j5\omega_0 t}$$

Prin urmare coeficienții sunt:

$$A_{-5c} = \frac{1}{2}C \cdot e^{-j\varphi}; A_{5c} = \frac{1}{2}C \cdot e^{j\varphi}; A_{-3c} = A_{3c} = \frac{1}{2}B; A_{-1c} = -\frac{1}{2j}A; A_{1c} = \frac{1}{2j}A \text{ și } A_{nc} = 0 \text{ în rest.}$$

PROBLEMA 5

Să se determine valoarea componentei continue, A_0 , din dezvoltarea în SFA, pentru semnalele periodice în timp continuu reprezentate în figură:



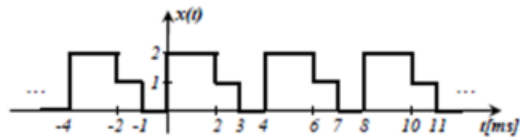
A



B



C



Cazul A:

Perioada semnalului dat este

$$T = 4 \cdot 10^{-3} s$$

Valoarea componentei continue este dată de

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{4 \cdot 10^{-3}} \left(\int_0^2 2 dt + \int_2^3 1 dt + \int_3^4 0 dt \right) = \frac{2(2-0) + 1(3-2) + 0(4-3)}{4 \cdot 10^{-3}} = \frac{5}{4} \cdot 10^3$$



Cazul B:

Perioada semnalului dat este

$$T = 10^{-3} \text{ s.}$$

Pe perioada de la 0 la 1, graficul este cel al unei drepte (funcție de grad 1) care trece prin punctele M(0,0) și N(1,4).

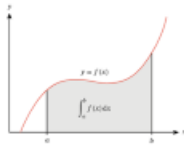
Vom avea:

$$y = at + b; 0 = a \cdot 0 + b, 4 = a \cdot 1 + b;$$

$$\text{Se obține: } a = 4, b = 0, y = 4t$$

Valoarea componentei continue este dată de

$$A_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt = \frac{1}{10^{-3}} \int_0^1 4t dt = 4 \cdot 10^3 \cdot \frac{t^2}{2} \Big|_0^1 = 2 \cdot 10^3$$



În **cazul A** valoarea ariei suprafeței dintre grafic și axa timpului se calculează imediat cu arii de dreptunghiuri și este: $2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = 5$

Valoarea coeficientului se calculează imediat:

$$A_0 = \frac{5}{4} \cdot 10^3$$



În **cazul B** valoarea ariei suprafeței dintre grafic și axa timpului se calculează imediat folosind formula ariei unui triunghi și este: $1 \cdot 4/2 = 2$

Valoarea coeficientului se calculează imediat:

$$A_0 = 2 \cdot 10^3$$



În **cazul C** valoarea ariei suprafeței dintre grafic și axa timpului se calculează folosind formula ariei unui trapez și este: $(8 + 4) \cdot 3/2 = 18$

Cum perioada este $T = 8 \cdot 10^{-3} \text{ s}$, valoarea coeficientului este:

$$A_0 = 8 \cdot 18 \cdot 10^3 = 144 \cdot 10^3$$

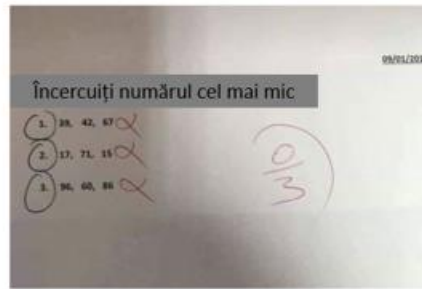


SLIDE 35

Pentru forme mai complicate ale semnalului se complică corespunzător și calculul integralei.

Vă reamintesc interpretarea integralei definite, prin intermediul ariei mărginite de graficul funcției și axa orizontală.

Copilul este încă confuz...
Nu știe de ce a primit zero puncte.



Ce ți-e și cu testele astea grilă...