

CURSUL 9

APLICAȚII ALE TRANSFORMATEI FOURIER ȘI SALIT.

Modulația. Modulația cu purtător sinusoidal Comparație între tipurile de modulație.

Aplicații la modulația în amplitudine.

Modulația în amplitudine 2BL-PS.

Modulația în amplitudine BLU-PS.

Iată ce ne propunem să parcurgem în cursul de astăzi.

MODULAȚIA

Modulația în amplitudine	(AM – Amplitude Modulation)
Modulația în frecvență	(FM – Frequency Modulation)
Modulația în fază	(PM – Phase Modulation)

Probleme întâmpinate în transmisia semnalelor audio:

- 1 - apariția interferențelor
- 2 - constrângeri și dificultăți legate de lungimea antenei utilizate

Cum le depășim?

Utilizăm modulația în amplitudine ca să transmitem un semnal folosind o bandă de frecvențe diferită de cea ocupată de semnalul original.

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

2

Ați auzit de modulația în amplitudine a unui semnal? (AM – Amplitude Modulation)

Dar de modulație în frecvență (FM – Frequency Modulation)?

Poate ați auzit de modulația în fază ((PM – Phase Modulation)...

Să vedem, pentru început, de ce este, spre exemplu, modulația în amplitudine necesară și în ce constă ea.

În sistemele de comunicații adesea avem nevoie să transmitem un semnal folosind o bandă de frecvențe diferită de cea ocupată de semnalul original.

De exemplu, semnalele audio aparțin intervalului de la 0 la 22 kHz. Adesea nu este practic să transmitem un astfel de semnal folosind banda sa originală de frecvențe, pentru că ne confruntăm cu două mari probleme într-o astfel de situație:

- 1 apariția interferențelor;
- 2 constrângeri și dificultăți legate de lungimea antenei utilizate.

În ceea ce privește prima problemă semnalată, deoarece multe semnale sunt difuzate prin aer, trebuie să ne asigurăm că nu se suprapune transmisia a doi emițători ce folosesc aceleași benzi de frecvență, evitându-se astfel eventualele interferențe. Gândiți-vă la posturile de radio, spre exemplu.

Privind a doua problemă, în transmisia undelor electromagnetice (de exemplu, a undelor radio), lungimea antenei ce ar trebui utilizată în transmiterea semnalelor de frecvență joasă ar fi mult prea mare. Astfel, La o frecvență de 1kHz, lungimea de undă corespunzătoare ar fi de aproape 300 km, iar lungimea antenei, calculată funcție de lungimea de undă, ar avea un ordin de mărime de ordinul miilor de kilometri.

Din aceste motive, trebuie să schimbăm banda de frecvență asociată unui astfel de semnal înainte

de transmisia lui.

Acestea sunt doar două motive pentru care utilizăm modulația în amplitudine (AM).

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

Despre modulația semnalelor... în general

Semnal modulator
Semnal purtător
Semnal modulat

semnalul de transmis (semnalul care conține informația)
semnalul asupra căruia se transferă informația
semnalul obținut prin acțiunea semnalului modulator asupra
semnalului purtător, respectiv semnalul care se transmite efectiv

Modulația este procesul prin care se transferă informația conținută de semnalul modulator asupra semnalului purtător, iar *demodulația* este procesul prin care se realizează extragerea acestei informații.

În fapt, se produce modificarea unui parametru al semnalului purtător de către semnalul modulator, având ca rezultat deplasarea dorită a spectrului de frecvență al semnalului modulat.

După natura semnalului purtător facem următoarea clasificare:

- *Modulație cu semnal purtător sinusoidal*
- *Modulație cu semnal purtător în impulsuri*

Să facem câteva observații despre ceea ce înseamnă *modulația semnalelor* în general.

Numim *semnal modulator* semnalul care trebuie transmis, respectiv semnalul care conține informația.

Numim *semnal purtător* (sau simplu *purtătoare*) semnalul asupra căruia se transferă informația.

Numim *semnal modulat* semnalul obținut prin acțiunea semnalului modulator asupra semnalului purtător, respectiv semnalul care se transmite efectiv.

Ce facem prin modulație? Prin *modulație*, ca proces, se transferă informația conținută de semnalul modulator asupra semnalului purtător, iar prin *demodulație* se realizează extragerea acestei informații.

De fapt, prin modulație se produce modificarea unui parametru al semnalului purtător de către semnalul modulator, având ca rezultat deplasarea spectrului de frecvență al acestuia din urmă din domeniul frecvențelor joase în domeniul

frecvențelor înalte, mult mai convenabil din punct de vedere al condițiilor de transmisie.

După natura semnalului purtător întâlnim:

- *Modulație cu semnal purtător sinusoidal*
- *Modulație cu semnal purtător în impulsuri*

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

Modulația exprimată în termeni... de sezon



Semnalul modulator
(care conține informația)



Semnalul purtător
(care preia informația)



Semnalul modulat
(cel care se transportă efectiv)

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

1

Dau un exemplu de sezon, pentru a înțelege mai bine ce este acela semnal modulator, semnal purtător și semnal modulat.

Se realizează transportul, iar apoi demodulația (procesul invers).

Despre modulația cu semnal purtător sinusoidal

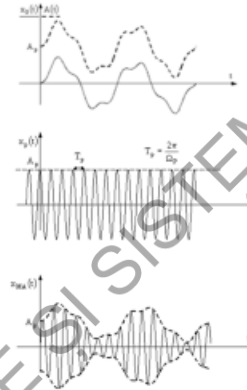
$x_p(t) = A_p \cos(\Omega_p t + \Phi_p)$
 Modulație în amplitudine
 Modulație în frecvență
 Modulație în fază

Semnal modulat
în amplitudine:

$$x_{MA}(t) = A(t) \cos(\Omega_p t + \Phi_p) = [A_p + k x_0(t)] \cos(\Omega_p t + \Phi_p)$$

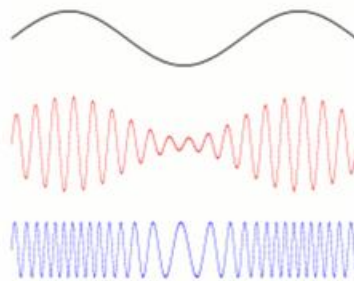
semnal modulator

$$\Omega_i(t) = \Omega_p + k x_0(t)$$



Dacă semnalul purtător nu este Moș Crăciun, ci un semnal sinusoidal, lucrurile se petrec ca în slide.

Comparație în domeniul timp între semnalul sinusoidal MA (AM), respectiv cel MF (FM)



Proprietățile transformatei Fourier

Proprietatea	Domeniu timp	Domeniu frecvență
Liniaritate	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Deplasare în timp	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Deplasare în frecvență	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Schimbare scară timp	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Conjugată complexă	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Dualitate	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Convoluție în timp	$(x_1 * x_2)(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Produs în timp	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi} (X_1 * X_2)(\omega)$
Derivare în timp	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(\omega)$
Derivare în frecvență	$tX(t)$	$j\frac{d}{d\omega} X(\omega)$
Integrare în timp	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega} X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

Se utilizează pentru transformata Fourier, a semnalului $x(t)$, atât notația $X(\omega)$, cât și notația $X(j\omega)$.

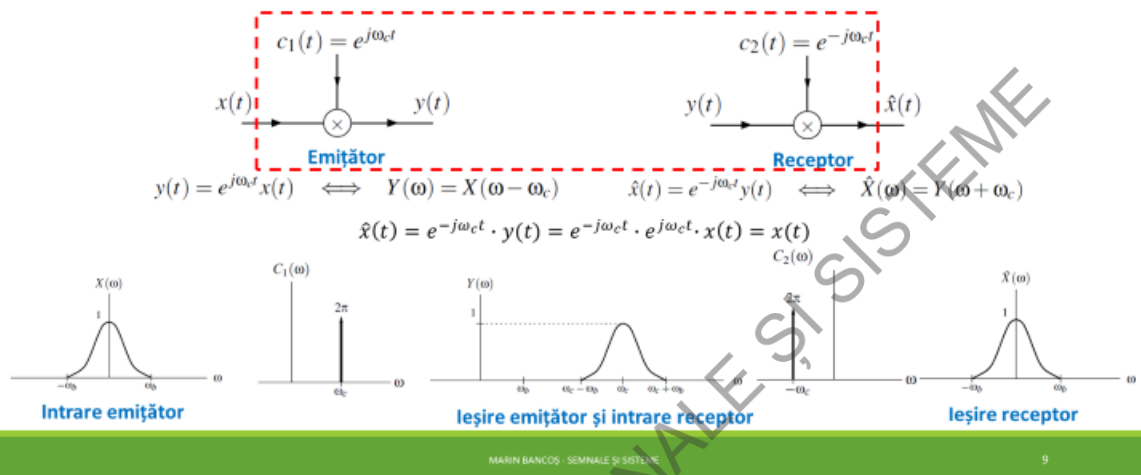
Vom avea nevoie, pe parcurs și de utilizarea proprietăților transformatei Fourier. Acesta și este motivul pentru care vi le reamintesc aici. Reținem corespondența de la deplasarea în frecvență, încadrată în chenar.

Transformate Fourier uzuale

	$x(t)$	$X(\omega)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
3	1	$2\pi\delta(\omega)$
4	$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
5	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
6	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
7	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
8	$\text{rect}(t/\tau)$	$X(\omega) = \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
9	$\frac{\tau}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{t \cdot \tau}{2}\right)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$
10	$e^{-at}u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$

De asemenea, tabelul de transformate Fourier uzuale îl vom mai folosi și în următoarele aplicații. Reținem transformata Fourier în cazul exponențialei complexe.

Model de sistem de modulație în amplitudine (MA)



$$\hat{x}(t) = e^{-j\omega_c t} \cdot y(t) = e^{-j\omega_c t} \cdot e^{j\omega_c t} \cdot x(t) = x(t)$$

Înainte de a introduce orice schemă practică, ce se utilizează efectiv pentru modulația în amplitudine a semnalelor, vom urmări ceea ce se întâmplă în cazul pur teoretic al utilizării modulației în amplitudine a unui semnal pentru transportul acestuia.

Sistemul ar consta din două blocuri, unul cu rol de emițător,

iar celălalt cu rol de receptor,

conectate în serie.

La emițător se produce modularea semnalului, iar la receptor demodularea.

Să vedem, pentru început, prin ce se caracterizează emițătorul, în domeniul timp.

Observăm, din tabelul cu proprietăți ale transformatei Fourier, că în domeniul frecvență se ajunge la o „întârziere” = deplasare către o frecvență mai mare, egală cu *frecvența ω_c a purtătoarei*, care este exponențiala complexă $e^{j\omega_c t}$ (o sinusoidă complexă).

Să vedem, acum, prin ce se caracterizează receptorul. Tot din tabelul cu

proprietăți ale transformatei Fourier, observăm că în domeniul frecvență se produce acum un „avans” = deplasare către o frecvență mai mică, egală cu *frecvența purtătoare* ω_c , în fapt revenirea în gama de frecvențe inițială.

Evident, pe ieșirea receptorului vom culege chiar semnalul inițial, de la intrarea emițătorului. Să justificăm acest lucru.

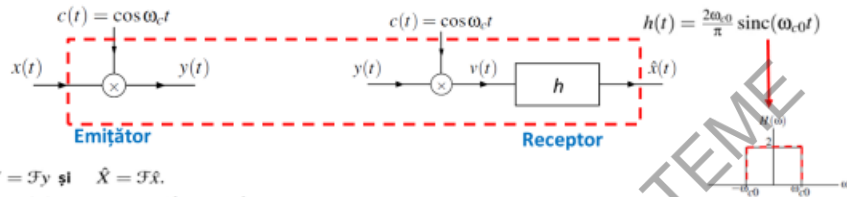
Suntem acum în măsură să analizăm ce se întâmplă, pe parcursul întregului proces, în domeniul frecvență. Să urmărim.

Concluzionând, deși tot ceea ce am prezentat este absolut corect din punct de vedere teoretic, nu este, din păcate, utilizabil în practică sub această formă. Problema constă în necesitatea generării, atât la emițător, cât și la receptor, a exponențialei complexe (sinusoidei complexe) cu rol de purtătoare.

Multe din observațiile făcute vor rămâne valabile, însă, în cazul în care lucrăm cu o purtătoare de forma unei sinusoide reale. Un astfel de semnal nu numai că poate fi generat, dar are și valoare practică deosebită, după cum am subliniat nu o dată.

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

Sistem de modulație în amplitudine (MA) cu ambele benzi laterale (2BL) și purtătoare suprimată (PS) Double-Sideband Suppressed-Carrier Amplitude Modulation (DSB-SC AM)



Fie $X = \mathcal{F}x$, $Y = \mathcal{F}y$ și $\hat{X} = \mathcal{F}\hat{x}$.

Presupunem că: $X(\omega) = 0$ pentru $\omega \notin [-\omega_b, \omega_b]$

Vom demonstra că emițătorul este caracterizat prin:

$$Y(\omega) = \frac{1}{2} [X(\omega + \omega_c) + X(\omega - \omega_c)]$$

Apoi vom demonstra că receptorul este caracterizat prin:

$$\hat{X}(\omega) = [Y(\omega + \omega_c) + Y(\omega - \omega_c)] \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_{c0}}\right)$$

Arătăm că dacă sunt respectate condițiile:

$$\omega_b < \omega_{c0} < 2\omega_c - \omega_b$$

obținem:

$$\hat{X}(\omega) = X(\omega) \quad \Rightarrow \quad \hat{x}(t) = x(t)$$

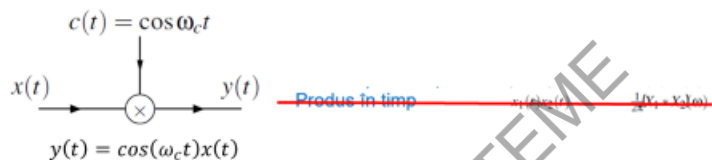
Considerăm sistemul din figură, care asigură transmiterea semnalului folosind modulație în amplitudine cu ambele benzi laterale și purtătoarea suprimată (MA 2BL-PS). În limba engleză: Double-Sideband Suppressed-Carrier Amplitude Modulation (DSB-SC AM)

Sistemul constă din două blocuri, unul cu rol de emițător (unde se realizează modularea), iar celălalt cu rol de receptor (prin care se realizează demodularea), ambele conectate în serie, ca în figură.

Emițătorul conține un simplu bloc de multiplicare cu $\cos \omega_c t$, în timp ce emițătorul conține un bloc de multiplicare tot cu $\cos \omega_c t$, dar și un SALIT (FTJ) caracterizat prin răspunsul la impuls h dat de expresia din slide.

Facem notațiile pentru transformatele Fourier. Etapele pe care le vom respecta în înțelegerea a tot ceea ce se întâmplă în sistem sunt următoarele. Să urmărim pe slide.

La emițător (modulare)



$$Y(\omega) = \mathcal{F}\{\cos(\omega_c t)x(t)\}(\omega) \Rightarrow Y(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2}(e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t})x(t)\right\}(\omega)$$

$$= \frac{1}{2}[\mathcal{F}\{e^{j\omega_c t}x(t)\}(\omega) + \mathcal{F}\{e^{-j\omega_c t}x(t)\}(\omega)]$$

$$= \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_c) + X(\omega + \omega_c)]$$

Deplasare în frecvență $e^{j\omega_c t}x(t) \quad X(\omega - \omega_c)$

$$Y(\omega) = \frac{1}{2}[X(\omega - \omega_c) + X(\omega + \omega_c)]$$

La calculul transformatei Fourier, chiar dacă suntem tentați să folosim proprietatea de multiplicare din tabelul dat, adică de produs în două semnale în timp continuu, o vom ocoli, deoarece ea ne-ar conduce la o convoluție care ar complica mult lucrurile.

Din acest motiv, trecem la scrierea cosinusului cu ajutorul exponențialei, iar apoi folosim liniaritatea și proprietatea deplasării în frecvență (numită de unii autori și modulare), utilizată și în cazul sistemului analizat anterior.

Iată rezultatul final obținut.

La receptor (demodulare)

$$c(t) = \cos \omega_c t \quad h(t) = \frac{2\omega_0}{\pi} \text{sinc}(\omega_0 t)$$

$$v(t) = \cos(\omega_c t) y(t), \quad h(t) = \frac{2\omega_0}{\pi} \text{sinc}(\omega_0 t), \quad \hat{x}(t) = (v * h)(t)$$

$$Y = \mathcal{F}y, \quad V = \mathcal{F}v, \quad H = \mathcal{F}h, \quad \hat{X} = \mathcal{F}\hat{x}$$

$$V(\omega) = \mathcal{F}\{\cos(\omega_c t) y(t)\}(\omega)$$

$$= \mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} (e^{j\omega_c t} + e^{-j\omega_c t}) y(t)\right\}(\omega)$$

$$= \frac{1}{2} [\mathcal{F}\{e^{j\omega_c t} y(t)\}(\omega) + \mathcal{F}\{e^{-j\omega_c t} y(t)\}(\omega)]$$

$$= \frac{1}{2} [Y(\omega - \omega_c) + Y(\omega + \omega_c)]$$

$$H(\omega) = \mathcal{F}\left\{\frac{2\omega_0}{\pi} \text{sinc}(\omega_0 t)\right\}(\omega) = 2 \text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

$$\frac{\tau}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{t \cdot \tau}{2}\right) \longleftrightarrow \text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$$

$$\hat{X}(\omega) = H(\omega) \cdot V(\omega)$$

MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

12

Suntem în măsură acum să calculăm toate transformatele Fourier pentru semnalele importante ce apar aici. Să le luăm pe rând.

În cazul lui $V(\omega)$ calculul se face asemănător cu ceea ce s-a făcut anterior. Să urmărim pe slide.

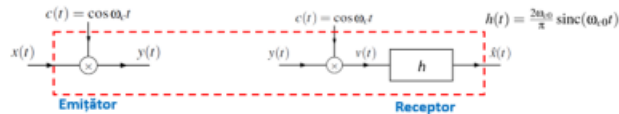
Pentru calculul răspunsului în frecvență $H(\omega)$, ținem cont că în tabelul cu transformate Fourier uzuale, la poziția 9, dacă facem

$$\tau = 2\omega_{c0},$$

vom obține imediat expresia lui $H(\omega)$.

Ultima relație rezultă imediat din proprietatea ce caracterizează SALIT în domeniul frecvență.

Sistemul complet utilizat pentru transmisia semnalului cu MA 2BL-PS



$$Y(\omega) = \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_c) + X(\omega + \omega_c)] \quad V(\omega) = \frac{1}{2} [Y(\omega - \omega_c) + Y(\omega + \omega_c)] \quad \hat{X}(\omega) = H(\omega)V(\omega)$$

$$Y(\omega - \omega_c) = \frac{1}{2} [X((\omega - \omega_c) - \omega_c) + X((\omega - \omega_c) + \omega_c)] = \frac{1}{2} [X(\omega - 2\omega_c) + X(\omega)]$$

$$Y(\omega + \omega_c) = \frac{1}{2} [X((\omega + \omega_c) - \omega_c) + X((\omega + \omega_c) + \omega_c)] = \frac{1}{2} [X(\omega) + X(\omega + 2\omega_c)]$$

$$V(\omega) = \frac{1}{2} [Y(\omega - \omega_c) + Y(\omega + \omega_c)] = \frac{1}{2} X(\omega) + \frac{1}{4} X(\omega - 2\omega_c) + \frac{1}{4} X(\omega + 2\omega_c)$$

$$\hat{X}(\omega) = H(\omega)V(\omega) = H(\omega) \left[\frac{1}{2} X(\omega) + \frac{1}{4} X(\omega - 2\omega_c) + \frac{1}{4} X(\omega + 2\omega_c) \right] = \frac{1}{2} H(\omega) X(\omega) + \frac{1}{4} H(\omega) X(\omega - 2\omega_c) + \frac{1}{4} H(\omega) X(\omega + 2\omega_c) = X(\omega)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{=0} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{=0}$

MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

13

Pe sistemul complet, folosim acum rezultatele obținute pentru $Y(\omega)$, $V(\omega)$ și $\hat{X}(\omega)$.

$$Y(\omega) = \frac{1}{2} [X(\omega - \omega_c) + X(\omega + \omega_c)]$$

$$V(\omega) = \frac{1}{2} [Y(\omega - \omega_c) + Y(\omega + \omega_c)]$$

$$Y(\omega - \omega_c) = \frac{1}{2} [X((\omega - \omega_c) - \omega_c) + X((\omega - \omega_c) + \omega_c)]$$

$$= \frac{1}{2} [X(\omega - 2\omega_c) + X(\omega)]$$

$$Y(\omega + \omega_c) = \frac{1}{2} [X((\omega + \omega_c) - \omega_c) + X((\omega + \omega_c) + \omega_c)]$$

$$= \frac{1}{2} [X(\omega) + X(\omega + 2\omega_c)]$$

$$V(\omega) = \frac{1}{2} [Y(\omega - \omega_c) + Y(\omega + \omega_c)] = \frac{1}{2} X(\omega) + \frac{1}{4} X(\omega - 2\omega_c) + \frac{1}{4} X(\omega + 2\omega_c)$$

$$\hat{X}(\omega) = H(\omega)V(\omega) = H(\omega) \left[\frac{1}{2} X(\omega) + \frac{1}{4} X(\omega - 2\omega_c) + \frac{1}{4} X(\omega + 2\omega_c) \right]$$

$$= \frac{1}{2}H(\omega)X(\omega) + \underbrace{\frac{1}{4}H(\omega)X(\omega - 2\omega_c)}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{4}H(\omega)X(\omega + 2\omega_c)}_{=0}$$

Al doilea și al treilea termen sunt nuli, deoarece $H(\omega)$ nu poate fi simultan nenul cu $X(\omega - 2\omega_c)$, respectiv cu $X(\omega + 2\omega_c)$. La frecvențele la care $H(\omega)$ și $X(\omega)$ sunt simultan nenule, avem, în mod sigur, $H(\omega) = 2$.

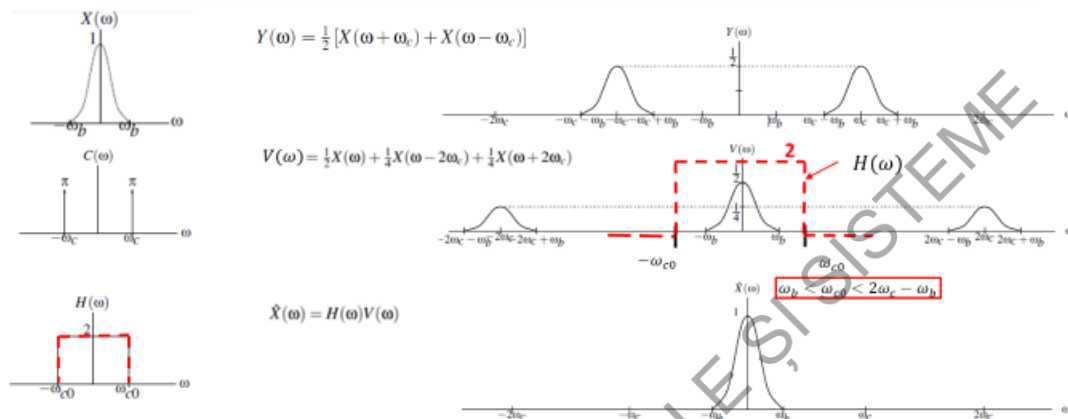
Vom înțelege și mai bine imediat de ce stau lucrurile așa.

Așadar:

$$\hat{X}(\omega) = \frac{1}{2}H(\omega)X(\omega) = \frac{1}{2}2X(\omega) = X(\omega)$$

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

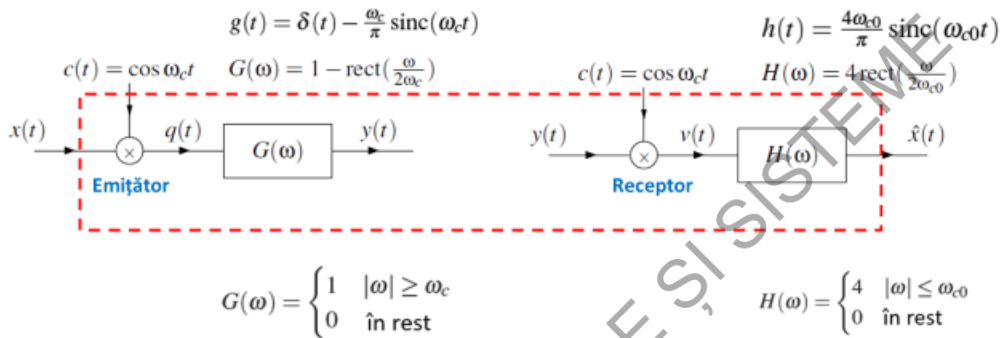
În domeniul frecvență



Analizăm acum toate rezultatele evidențiate în domeniul frecvență.

Sistem de modulație în amplitudine (MA) cu bandă laterală unică (BLU) și purtătoare suprimată (PS)

Single-Sideband Suppressed-Carrier (SSB-SC) Amplitude Modulation (AM)



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

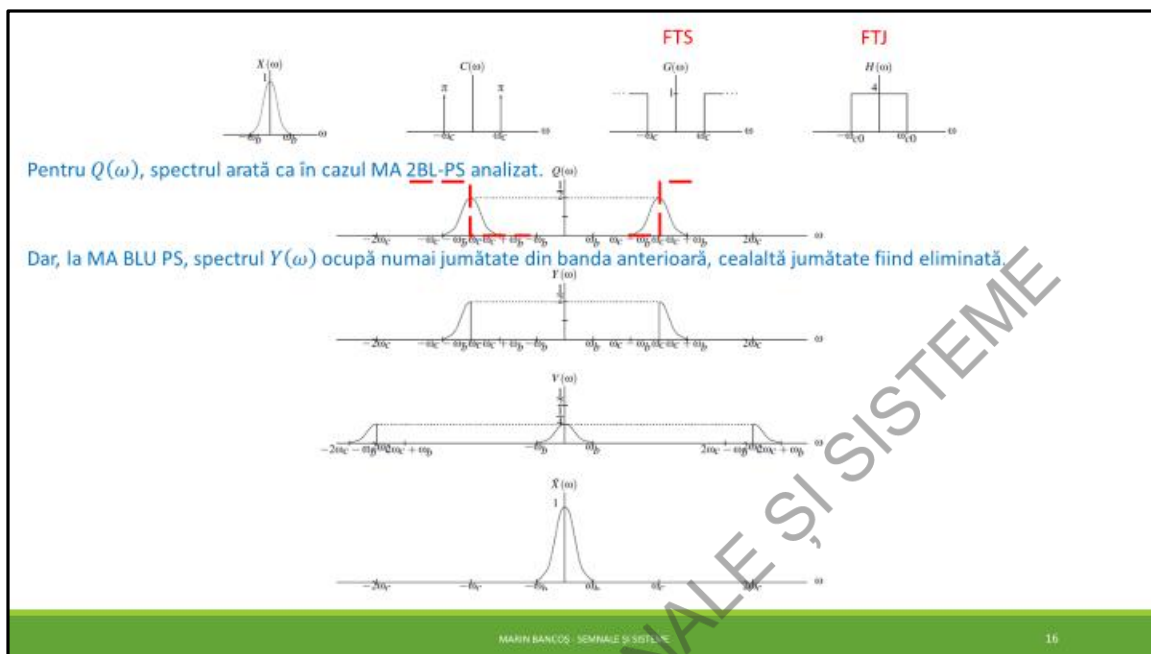
15

În limba engleză: Single-Sideband Suppressed-Carrier (SSB-SC) Amplitude Modulation (AM)

Un alt mod ce se utilizează în cazul modulației în amplitudine, de interes practic, este cel care e prezentat în figură. Analiza acestui sistem se face similar cu cazul precedent.

În acest caz, cu o modificare minoră la sistemul anterior, se folosește în întreg procesul doar jumătate din banda de frecvență necesară în cazul anterior.

Sistemul modificat este cel ilustrat în figură. Nu trebuie să ne sperie expresiile complicate ale $g(t)$ și $h(t)$, deoarece ele sunt alese astfel încât să reprezinte răspunsurile dorite la impuls, pentru un FTS și un FTJ.



Iată cum stau lucrurile în ceea ce privește domeniul frecvență la MA BLU-PS.