

CURSUL 8

APLICAȚII ALE TRANSFORMATEI FOURIER ȘI SALIT.

Aplicații în analiza circuitelor. Rezistorul, bobina și condensatorul ca elemente de circuit.

Aplicații în filtrarea semnalelor. Tipuri de filtre.

Iată ce ne propunem să parcurgem în cursul de astăzi.

Transformata Fourier – instrument util în analiza circuitelor

Utilitatea transformării Fourier se datorează faptului că ecuațiile diferențiale/integrale care descriu bobinele și condensatorii sunt mult mai simplu de exprimat în domeniul frecvență decât în domeniul timp.

Încă din primul curs, am definit sistemul din electronică ca fiind un ansamblu de circuite ce se interconectează în vederea asigurării unei funcționări unitare, iar circuitul am stabilit că este un ansamblu de componente electrice și electronice, interconectate prin conductoare sau prin câmp magnetic, care transmit și prelucrează semnale electrice.

Transformata Fourier este un instrument foarte util pentru analiza circuitelor. Utilitatea ei se datorează în bună parte faptului că ecuațiile diferențiale/integrale care descriu bobinele și condensatorii sunt mult mai simplu de exprimat în domeniul frecvență decât în domeniul timp. Haideți să ne convingem de acest lucru.

Rezistorul ca element de circuit

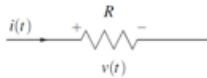
Rezistor = element de circuit care opune rezistență curgerii curentului electric prin circuitul respectiv.

Legea lui Ohm:

- în domeniul timp: $v(t) = Ri(t)$ sau $i(t) = \frac{1}{R}v(t)$

- în domeniul frecvență: $V(\omega) = RI(\omega)$ sau $V(j\omega) = RI(j\omega)$

Simbolul utilizat



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

3

Un *rezistor* este un element de circuit care opune rezistență curgerii curentului electric prin circuitul respectiv.

Un rezistor cu *rezistența* R intermediază legătura dintre tensiune și curent, prin legea lui Ohm:

$$v(t) = Ri(t).$$

În domeniul frecvență, folosind transformatele Fourier, relația de mai sus devine $V(\omega) = RI(\omega)$ sau $V(j\omega) = RI(j\omega)$, funcție de notația utilizată.

În reprezentarea de circuit, un rezistor este notat, de obicei, cu simbolul din figură.

Bobina ca element de circuit

Bobină = element de circuit care realizează conversia unui curent electric în câmp magnetic și invers.

În domeniul timp:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \text{ sau } i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

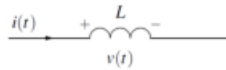
În domeniul frecvență:

$$V(\omega) = j\omega LI(\omega) \text{ sau } V(j\omega) = j\omega LI(j\omega),$$

respectiv

$$I(\omega) = \frac{1}{j\omega L} V(\omega) \text{ sau } I(j\omega) = \frac{1}{j\omega L} V(j\omega).$$

Simbolul utilizat



O *bobină* este un element de circuit care realizează conversia unui curent electric în câmp magnetic și invers.

O bobină cu *inductanța* L intermediază legătura dintre tensiunea la borne și curentul care străbate bobina prin relația

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

sau echivalent:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau.$$

În domeniul frecvență, folosind transformatele Fourier, relația de mai sus devine

$$V(\omega) = j\omega LI(\omega) \text{ sau } V(j\omega) = j\omega LI(j\omega),$$

respectiv

$$I(\omega) = \frac{1}{j\omega L} V(\omega) \text{ sau } I(j\omega) = \frac{1}{j\omega L} V(j\omega),$$

funcție de notația utilizată. În reprezentarea de circuit, o bobină este notată cu simbolul din figură. Să remarcăm avantajul uriaș al calculului în domeniul frecvență. Dacă în domeniul timp eram nevoiți să apelăm la derivate și integrale, în domeniul frecvență realizăm înmulțiri și împărțiri.

Condensatorul ca element de circuit

Condensator = element de circuit care stochează sarcina electrică.

În domeniul timp:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \text{ sau } i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}.$$

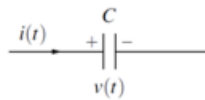
În domeniul frecvență:

$$V(\omega) = \frac{1}{j\omega C} I(\omega) \text{ sau } V(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} I(j\omega),$$

respectiv

$$I(\omega) = j\omega C V(\omega) \text{ sau } I(j\omega) = j\omega C V(j\omega).$$

Simbolul utilizat



Un *condensator* este un element de circuit care stochează sarcina electrică. Un condensator cu *capacitatea* C intermediază legătura dintre tensiunea la borne și curentul care străbate condensatorul prin relația

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \text{ sau } i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}.$$

În domeniul frecvență, folosind transformatele Fourier, relația de mai sus devine

$$V(\omega) = \frac{1}{j\omega C} I(\omega) \text{ sau } V(j\omega) = \frac{1}{j\omega C} I(j\omega),$$

respectiv

$$I(\omega) = j\omega C V(\omega) \text{ sau } I(j\omega) = j\omega C V(j\omega).$$

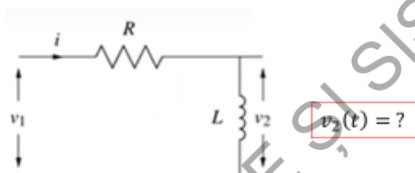
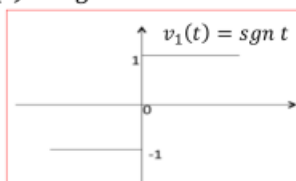
funcție de notația utilizată.

În reprezentarea de circuit, un condensator este notat cu simbolul din figură.

APLICAȚIE: Un circuit RL asimilat cu un SALIT

Se consideră circuitul din figură, de intrare v_1 și ieșire v_2 . Acesta poate fi asimilat cu un SALIT, el fiind caracterizat printr-o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți.

- Se cere să se determine răspunsul în frecvență H al sistemului.
- Se cere să se determine răspunsul $v_2(t)$ al sistemului la semnalul de intrare $v_1(t) = \operatorname{sgn} t$.



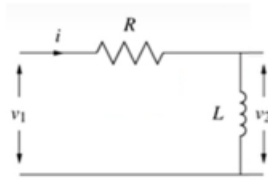
MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

6

Se consideră circuitul din figură, de intrare v_1 și ieșire v_2 . Acesta poate fi asimilat cu un SALIT, el fiind caracterizat printr-o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți.

- Se cere să se determine răspunsul în frecvență H al sistemului.
- Dacă semnalul de intrare este $v_1(t) = \operatorname{sgn} t$, se cere să se determine răspunsul $v_2(t)$ al sistemului.

REZOLVARE:



a) Pentru circuitul dat se scriu imediat ecuațiile:

$$v_1(t) = Ri(t) + L \frac{d}{dt} i(t)$$

$$v_2(t) = L \frac{d}{dt} i(t).$$

Folosind transformata Fourier acestea devin:

$$\begin{aligned} V_1(\omega) &= RI(\omega) + j\omega LI(\omega) \\ &= (R + j\omega L)I(\omega) \end{aligned}$$

$$V_2(\omega) = j\omega LI(\omega).$$

Deoarece circuitul considerat poate fi asimilat cu un SALIT, vom avea:

$$H(\omega) = \frac{V_2(\omega)}{V_1(\omega)} = \frac{j\omega LI(\omega)}{(R + j\omega L)I(\omega)} = \frac{j\omega L}{R + j\omega L}$$

Să urmărim pe slide rezolvarea.

Transformate Fourier uzuale

	$x(t)$	$X(\omega)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
3	1	$2\pi\delta(\omega)$
4	$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
5	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
6	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
7	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
8	$\text{rect}(t/\tau)$	$X(\omega) = \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
9	$\frac{\tau}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{t \cdot \tau}{2}\right)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$
10	$e^{-at}u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

8

Tabelul de transformate Fourier îl vom mai folosi și în următoarele aplicații. În cazul problemei noastre vom avea nevoie de pozițiile 4 și 10 din tabel.

b) Pentru $v_1(t) = \text{sgn } t$, din tabelul de transformate Fourier uzuale, obținem imediat că:

$$V_1(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

Răspunsul în frecvență al sistemului, H , intermediază legătura dintre ieșire și intrare prin relația:

$$V_2(\omega) = H(\omega)V_1(\omega) = \left(\frac{j\omega L}{R + j\omega L} \right) \left(\frac{2}{j\omega} \right) = \frac{2L}{R + j\omega L}$$

Aplicând acum transformata Fourier inversă în ambii membri ai acestei relații obținem:

$$v_2(t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2L}{R + j\omega L} \right\} (t) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{2}{R/L + j\omega} \right\} (t) = 2\mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{1}{R/L + j\omega} \right\} (t)$$

Din tabela de transformate Fourier uzuale vom obține imediat că:

$$v_2(t) = 2e^{-\frac{R}{L}t} \cdot u(t)$$

Pentru $v_1(t) = \text{sgn } t$, din tabelul de transformate Fourier uzuale (poziția 4), obținem imediat că:

Răspunsul în frecvență al sistemului intermediază legătura dintre ieșire și intrare prin relația din slide. Să o urmărim.

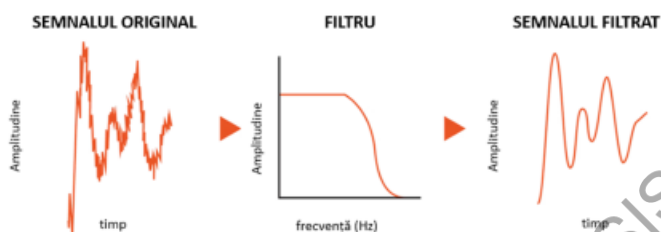
Aplicând acum transformata Fourier inversă în ambii membri ai acestei relații obținem:

Din tabela de transformate Fourier uzuale (poziția 10) vom obține imediat că:

$$v_2(t) = 2e^{-\frac{R}{L}t} \cdot u(t)$$

Trecem acum să vorbim despre o altă utilizare importantă a analizei Fourier în domeniul SALIT, respectiv despre cazul filtrelor de semnal.

Un sistem numit... filtru



Un filtru trece-jos este utilizat pentru înlăturarea „zgomotului” de înaltă frecvență conținut de un semnal

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

10

Filtrarea înseamnă, într-o exprimare foarte generală, a *extrage ceea ce vrem din ceea ce avem*.

Filtrarea reprezintă una dintre cele mai importante tehnici de procesare a semnalului. Ea a fost folosită încă de la începutul înregistrării analogice, pentru a îmbunătăți capacitatea noastră de a percepe caracteristicile semnalului real, prin suprimarea „zgomotului” și a eventualelor interferențe.

Filtrarea a fost (și este încă) utilizată în diverse aplicații, de la ajustarea bașilor și înaltelor, în domeniul muzical, până la reglarea frecvenței unui canal radio sau îmbunătățirea calității sunetului pe liniile telefonice.

Să explicăm exemplul din slide, pentru a avea o reprezentare a ceea ce înseamnă filtrarea unui semnal reprezentat în domeniul timp. Pe reprezentarea în domeniul timp a semnalului considerat, intuim care ar putea fi contribuția componentelor de joasă frecvență și respectiv a celor de înaltă frecvență.

Semnal util – joasă frecvență

Zgomot și perturbații – înaltă frecvență

Pentru a fi corectă evaluarea făcută în acest sens ar fi, însă, necesară reprezentarea în domeniul frecvență pentru o cuantificare exactă a acestor contribuții.

FILTRARE ȘI FILTRE

Procesul de modificare a spectrului de frecvență al unui semnal se numește *filtrare*.

Un sistem utilizat pentru realizarea operației de filtrare se numește *filtru*.

Filtrele selective în frecvență - permit trecerea unor anumite frecvențe, fără distorsiuni sau cu prețul unor mici distorsiuni, în timp ce atenuează semnificativ celelalte frecvențe.

Înțelegerea procesului de filtrare trebuie urmărită, deci, în domeniul frecvență, pentru a ne fi clar modul în care sunt gândite filtrele.

În multe cazuri, așadar, ne dorim să modificăm spectrul de frecvență al unui semnal, fie amplificând, fie atenuând anumite componente de frecvență.

Acest proces de modificare a spectrului de frecvență al unui semnal se numește *filtrare*.

Un sistem care efectuează o astfel de operație, de filtrare, se numește *filtru*.

Filtrele sunt asimilate cu sisteme SALIT, adică liniare și invariante în timp (fie ele analogice sau discrete).

Există mai multe tipuri de filtre. *Filtrele selective în frecvență* sunt cele care permit trecerea unor anumite frecvențe, fără distorsiuni sau cu prețul unor mici distorsiuni, în timp ce se atenuează semnificativ toate celelalte frecvențe.

Clasificarea filtrelor în funcție de caracteristicile răspunsului în frecvență $H(\omega)$ (notat și $H(j\omega)$)

Clasificare funcție de amplitudine

- Filtre trece-jos (*lowpass*)
- Filtre trece-sus (*highpass*)
- Filtre trece-bandă (*bandpass*)
- Filtre trece-tot (*allpass*)

Clasificare funcție de fază

- Filtru cu fază liniară
- Filtru cu fază neliniară

Răspunsul în frecvență al sistemului, notat cu $H(\omega)$ sau $H(j\omega)$, adică transformata Fourier a răspunsului sistemului la impuls, $h(t)$, este cel care ne furnizează caracteristicile filtrului.

Putem clasifica filtrele în funcție de amplitudine în patru categorii largi.

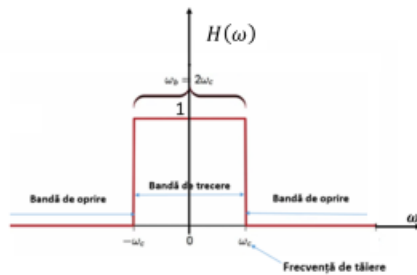
Filtrele trece-jos (lowpass) sunt filtre care permit frecvențelor joase să supraviețuiască și omoară orice altceva.

Filtrele trece-sus (highpass) care fac exact opusul, adică lasă să treacă frecvențele înalte și ucid frecvențele joase, în special frecvențele din jurul lui zero.

Filtrele trece-bandă (bandpass) sunt cele care lasă doar frecvențele dintr-o anumită bandă să treacă, iar *filtrele trece-tot (allpass)* sunt filtrele pentru care amplitudinea este o constantă în întreaga bandă de frecvențe.

De asemenea, putem clasifica filtrele și în funcție de fază. Acest lucru este mai puțin frecvent, dar este important de știut dacă un filtru are o caracteristică de fază liniară sau o caracteristică de fază neliniară.

Filtrul trece-jos în varianta ideală



$$H(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{pt } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

- Banda de trecere perfect netedă (plată)
- Atenuare infinită în banda de oprire
- Fază zero (nicio deplasare)

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

13

Am făcut deja apel la un filtru trece-jos în exemplul pe care l-am dat.

Care este, oare, cel mai bun filtru trece-jos pe care ni-l putem imagina? Ei bine, după cum am spus, un filtru trece-jos permite componentelor de frecvențe joase să treacă, și atenuează sau ucide componentele de frecvențe înalte. Deci, o versiune ideală a filtrului trece-jos ar lăsa componentele de frecvențe din banda joasă neatinse și ar atenua complet, ar ucide complet, componentele de frecvențe din banda superioară.

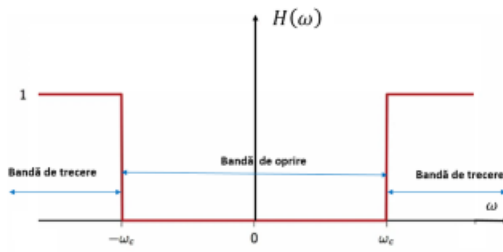
Așadar amplitudinea ar fi 1, pentru *banda de trecere*, și 0, pentru ceea ce numim *banda de oprire*.

Pentru a îmbunătăți situația, am avea nevoie ca răspunsul în amplitudine să fie o funcție reală, astfel încât filtrul să aibă fază zero și să nu introducă nicio întârziere. **Vă reamintesc că în cazul în care răspunsul la impuls, h , este o funcție reală vom avea:**

$$|H(\omega)| = |H(-\omega)| \text{ (paritate, vizibilă și în reprezentarea grafică)}$$

Dacă denumim ω_c - *frecvență de tăiere*, adică frecvența la care răspunsul în amplitudine trece de la 1 la 0, putem spune că filtrul ideal trece-jos are o bandă de trecere cu o lățime de bandă ω_b , egală cu de două ori ω_c .

Filtrul trece-sus în varianta ideală



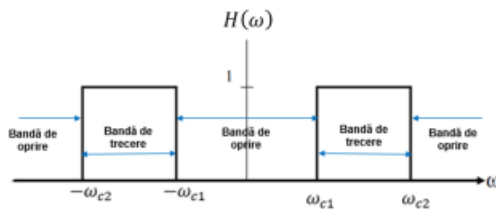
$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } |\omega| \geq \omega_c \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Un filtru trece-sus ideal elimină toate componentele care sunt de frecvență mai mică decât o anumită frecvență de tăiere, în timp ce componentele de frecvență rămase vor fi lăsate neafectate. Un astfel de filtru are reprezentarea răspunsului în frecvență ca în figură. Ea este complementară celei corespunzătoare filtrului trece-jos ideal.

Expresia analitică a răspunsului în frecvență pentru acest tip de filtru este de forma dată în slide.

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } |\omega| \geq \omega_c \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Filtrul trece-bandă în varianta ideală



$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } \omega_{c1} \leq |\omega| \leq \omega_{c2} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

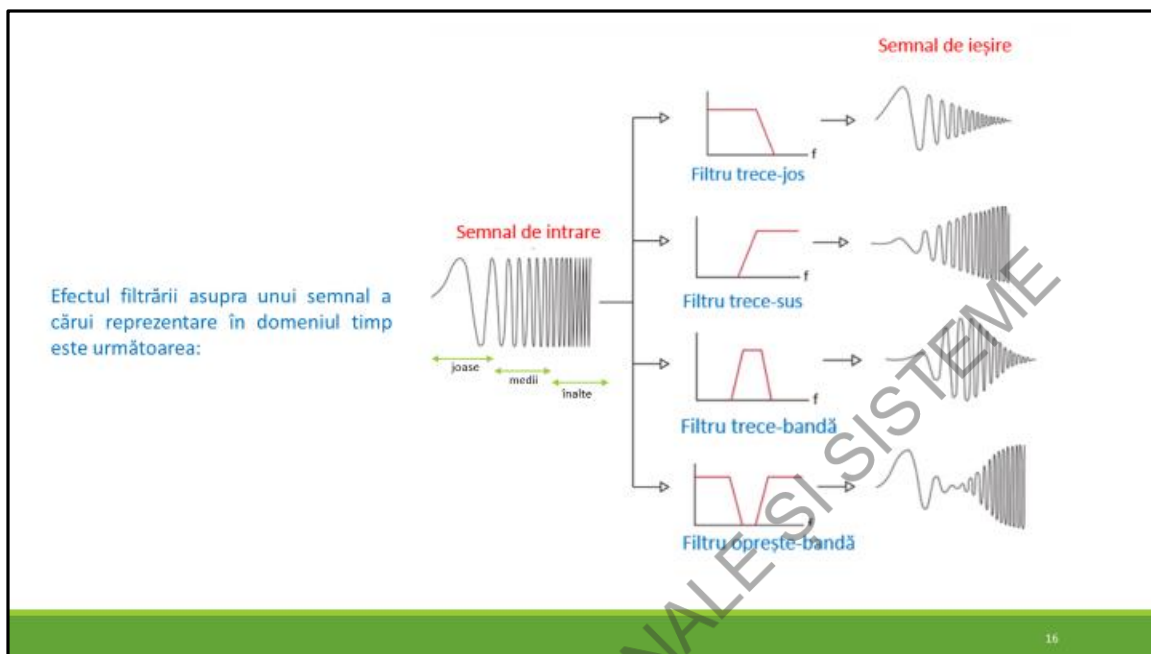
MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

15

În cazul filtrului trece-bandă ideal se elimină toate componentele a căror frecvență nu se află într-un anumit interval, fixat, între ω_{c1} și ω_{c2} , și sunt lăuate neafectate componentele rămase. Un astfel de filtru are un răspuns în frecvență de forma reprezentată grafic în figură, unde limitele benzii de trecere sunt chiar ω_{c1} și ω_{c2} . Expresia analitică a răspunsului în frecvență este de forma dată în slide.

Filtrul oprește-bandă este exact complementarul acestui tip de filtru. Nu mai insistăm, lucrurile fiind ușor de intuit.

Să urmărim acum efectele filtrării, cu fiecare dintre aceste tipuri de filtre, pe un semnal relevant prin însăși reprezentarea sa în domeniul timp.



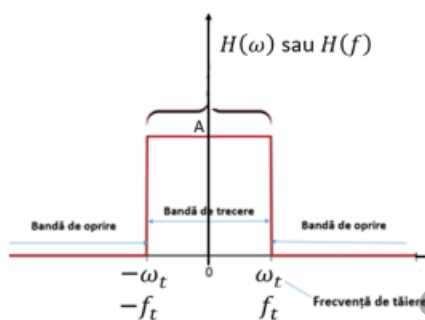
Cum înțelegem operațiunea de filtrare în domeniul timp?

Să urmărim care este efectul utilizării celor patru tipuri de filtre asupra unui semnal a cărui reprezentare în domeniul timp este cea dată în figură. Folosim un semnal a cărui reprezentare în domeniul timp avantajează înțelegerea operațiunii, respectiv putem vedea pe forma sa de undă zonele de frecvențe joase, medii sau înalte.

Tranzițiile au fost figurate, pentru fiecare tip de filtru, cu o anumită pantă!

Așa cum au fost prezentate lucrurile, înțelegem doar aproximativ, și nu exact, ce se întâmplă de fapt în cadrul acestui proces.

Revenim la filtrul trece-jos în varianta ideală



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

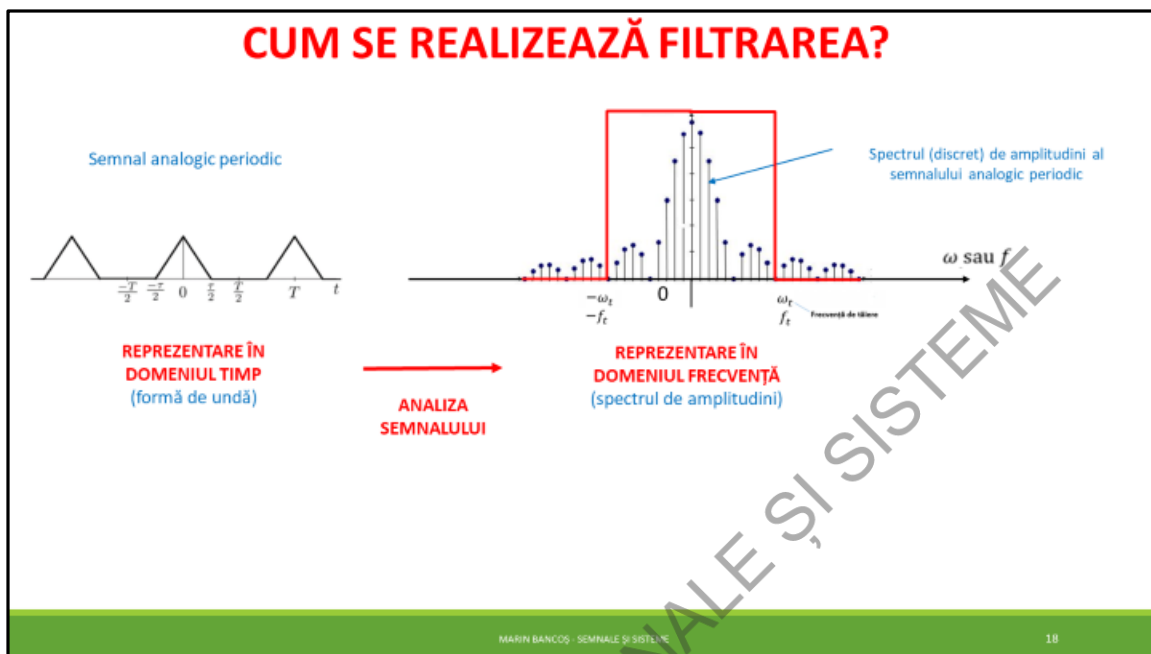
17

Cum se văd lucrurile în domeniul frecvență? Pentru a înțelege considerăm FTJ în varianta ideală.

Știm cum arată răspunsul H în frecvență al unui astfel de filtru (adică transformata Fourier a răspunsului la impuls h al filtrului).

Relativ la amplificarea în banda de trecere, aceasta se subînțelege ca fiind 1, dacă nu se specifică altfel.

CUM SE REALIZEAZĂ FILTRAREA?



Ne propunem să vizualizăm cum se realizează operațiunea de *filtrare*.

Vom lua exemplul concret al unui *semnal analogic periodic*, urmând să explicăm imediat ce se întâmplă și în cazul semnalelor analogice neperiodice. *Reprezentarea acestuia în domeniul timp* (adică *forma sa de undă*, care ar putea fi vizualizată pe un osciloscop) este cea figurată.

Pentru a ajunge la *reprezentarea în domeniul frecvență*, apelăm la instrumentele matematice studiate la dezvoltarea în serie Fourier a semnalelor analogice periodice. Se obține astfel *spectrul (discret) de frecvențe al semnalului* (care ar putea fi vizualizat pe ecranul unui *analizor de spectru*). Am figurat aici, pentru exemplificare, numai *spectrul de amplitudini* (bilateral), nu și cel de fază. Acesta, așa cum am subliniat la momentul potrivit, este unul caracterizat prin simetrie față de axa verticală (adică avem paritate).

Analiza semnalului constă în „spargerea” lui în componente elementare (în sinusoidă, denumite *armonici*). Fiecare componentă reprezintă fie *componenta continuă*, plasată în origine, fie o armonică (o sinusoidă).

Armonicile sunt: *fundamentală* de frecvență ω_0 (f_0), a *doua armonică* de

frecvență $2\omega_0$ ($2f_0$), a *treia armonică* de frecvență $3\omega_0$ ($3f_0$), ..., a *n-a armonică* de frecvență de frecvență $n\omega_0$ (nf_0), ...

Odată cu operațiunea de *filtrare*, vor trece numai componentele ce au frecvențe în banda de trecere, toate celelalte componente fiind eliminate. În cazul semnalelor analogice neperiodice analiza semnalului o facem cu ajutorul transformatei Fourier, spectrul obținut fiind, de această dată, unul continuu. Principal, filtrarea se realizează asemănător.

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

APLICAȚIE: Un SALIT cu rol de filtru trece-jos

Considerăm un SALIT, de intrare x , ieșire y și răspuns în frecvență H exprimat prin

$$H(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } |\omega| \leq 3\pi \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Considerăm ca semnal de intrare funcția periodică

$$x(t) = 1 + 2 \cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{1}{2} \cos(6\pi t)$$

- a) Să se determine SFE pentru semnalul $x(t)$
- b) Să se utilizeze SFE pentru a determina răspunsul $y(t)$ al sistemului la semnalul $x(t)$
- c) Să se reprezinte spectrul bilateral de amplitudini pentru $x(t)$ și $y(t)$

REZOLVARE:

$$\begin{aligned}
x(t) &= 1 + 2\cos(2\pi t) + \cos(4\pi t) + \frac{1}{2}\cos(6\pi t) \\
&= 1 + 2\left[\frac{1}{2}(e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t})\right] + \left[\frac{1}{2}(e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t})\right] + \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}(e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t})\right] \\
&= 1 + e^{j2\pi t} + e^{-j2\pi t} + \frac{1}{2}[e^{j4\pi t} + e^{-j4\pi t}] + \frac{1}{4}[e^{j6\pi t} + e^{-j6\pi t}] \\
&= \frac{1}{4}e^{-j6\pi t} + \frac{1}{2}e^{-j4\pi t} + e^{-j2\pi t} + 1 + e^{j2\pi t} + \frac{1}{2}e^{j4\pi t} + \frac{1}{4}e^{j6\pi t} \\
&= \frac{1}{4}e^{j(-3)(2\pi)t} + \frac{1}{2}e^{j(-2)(2\pi)t} + e^{j(-1)(2\pi)t} + e^{j(0)(2\pi)t} + e^{j(1)(2\pi)t} + \frac{1}{2}e^{j(2)(2\pi)t} + \frac{1}{4}e^{j(3)(2\pi)t}
\end{aligned}$$

Folosind cmmdc, determinăm imediat $\omega_0 = 2\pi$.

Așadar, am obținut în acest mod direct scrierea sub formă de SFE a semnalului de intrare, respectiv ca:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{jn\omega_0 t}$$

$$A_{nc} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 1 & n \in \{-1, 1\} \\ \frac{1}{2} & n \in \{-2, 2\} \\ \frac{1}{4} & n \in \{-3, 3\} \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

b) Îl determinăm acum pe $y(t)$. Deoarece sistemul considerat este un SALIT, ieșirea va avea forma

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{nc} e^{jn\omega_0 t},$$

unde noii coeficienți complecși se calculează, așa cum am stabilit, folosind relația $B_{nc} = A_{nc} \cdot H(n\omega_0)$.

Utilizând rezultatele de la primul punct vom obține că:

$$\begin{aligned} B_{0c} &= \underbrace{A_{0c}}_{=1} \cdot \underbrace{H(0 \cdot 2\pi)}_{=1} = 1 \cdot 1 = 1 \\ B_{1c} &= \underbrace{A_{0c}}_{=1} \cdot \underbrace{H(1 \cdot 2\pi)}_{=1} = 1 \cdot 1 = 1 \\ B_{-1c} &= \underbrace{A_{-1c}}_{=1} \cdot \underbrace{H((-1) \cdot 2\pi)}_{=1} = 1 \cdot 1 = 1 \\ B_{2c} &= \underbrace{A_{2c}}_{=1/2} \cdot \underbrace{H(2 \cdot 2\pi)}_{=0} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\ B_{-2c} &= \underbrace{A_{-2c}}_{=1/2} \cdot \underbrace{H((-2) \cdot 2\pi)}_{=0} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\ B_{3c} &= \underbrace{A_{3c}}_{=1/4} \cdot \underbrace{H(3 \cdot 2\pi)}_{=0} = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0 \\ B_{-3c} &= \underbrace{A_{-3c}}_{=1/4} \cdot \underbrace{H((-3) \cdot 2\pi)}_{=0} = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0 \end{aligned} \quad B_{nc} = \begin{cases} 1, & n \in \{-1, 0, 1\} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

21

Deoarece sistemul considerat este un SALIT, ieșirea va avea forma

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} B_{nc} e^{jn\omega_0 t},$$

unde noii coeficienți complecși se calculează, așa cum am stabilit, folosind relația $B_{nc} = A_{nc} \cdot H(n\omega_0)$.

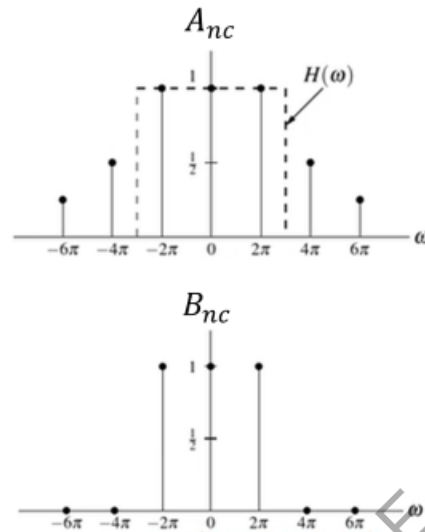
Utilizând rezultatele de la primul punct vom obține că:

$$\begin{aligned} B_{0c} &= \underbrace{A_{0c}}_{=1} \cdot \underbrace{H(0 \cdot 2\pi)}_{=1} = 1 \cdot 1 = 1 \\ B_{1c} &= \underbrace{A_{0c}}_{=1} \cdot \underbrace{H(1 \cdot 2\pi)}_{=1} = 1 \cdot 1 = 1 \\ B_{-1c} &= \underbrace{A_{-1c}}_{=1} \cdot \underbrace{H((-1) \cdot 2\pi)}_{=1} = 1 \cdot 1 = 1 \\ B_{2c} &= \underbrace{A_{2c}}_{=1/2} \cdot \underbrace{H(2 \cdot 2\pi)}_{=0} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\ B_{-2c} &= \underbrace{A_{-2c}}_{=1/2} \cdot \underbrace{H((-2) \cdot 2\pi)}_{=0} = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0 \\ B_{3c} &= \underbrace{A_{3c}}_{=1/4} \cdot \underbrace{H(3 \cdot 2\pi)}_{=0} = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0 \\ B_{-3c} &= \underbrace{A_{-3c}}_{=1/4} \cdot \underbrace{H((-3) \cdot 2\pi)}_{=0} = \frac{1}{4} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

$$B_{nc} = \begin{cases} 1, & n \in \{-1, 0, 1\} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

c)



Reprezentăm spectrul de amplitudini, atât pentru semnalul de intrare considerat, cât și pentru semnalul de ieșire obținut.

Răspunsul în frecvență al sistemului considerat este și el reprezentat, dar cu linie punctată.

Acest SALIT funcționează ca un filtru trece-jos, după cum era de așteptat (dacă se analizează expresia analitică a răspunsului în frecvență dată în enunțul problemei, expresie ce chiar corespunde unui astfel de filtru).