

CURSUL 7

SISTEME ÎN TIMP CONTINUU. INTERCONECTAREA SISTEMELOR.

SISTEM FĂRĂ MEMORIE. SISTEM CU MEMORIE.

SISTEM CAUZAL.

SISTEM INVERS. SISTEM INVERSABIL.

SISTEM STABIL. BIBO – STABILITATE.

SISTEM INVARIANT ÎN TIMP.

SISTEM ADITIV. SISTEM OMOGEN. SISTEM LINIAR.

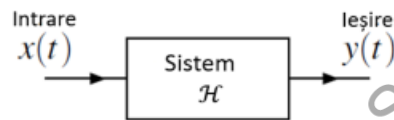
SISTEME ANALOGICE LINIARE ȘI INVARIANTE ÎN TIMP – SALIT.

Iată ce ne propunem să parcurgem în cursul de astăzi.

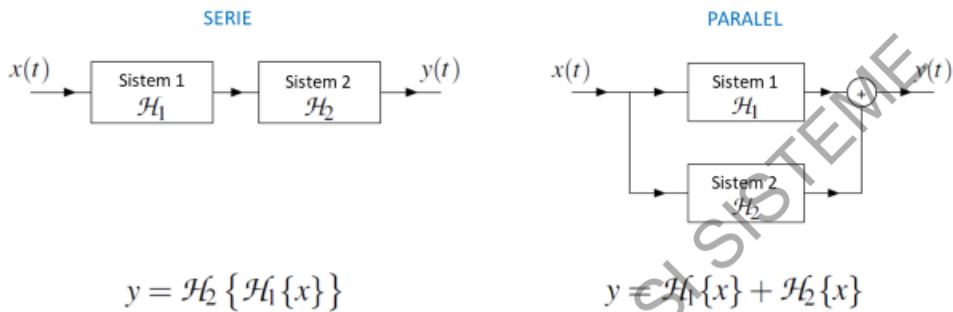
SISTEME ÎN TIMP CONTINUU

Un sistem având o intrare x și o ieșire y poate fi descris printr-o ecuație de forma $y = \mathcal{H}\{x\}$, unde $\mathcal{H}$ reprezintă un operator (o transformare) ce caracterizează sistemul.

Diagrama bloc prin care se reprezintă un sistem este de forma:



INTERCONECTAREA SISTEMELOR



La conectarea în serie (sau în cascadă), ieșirea primului sistem coincide cu intrarea celui de-al doilea sistem, sistemul astfel obținut fiind caracterizat prin ecuația

$$y = \mathcal{H}_2 \{ \mathcal{H}_1 \{ x \} \}.$$

În cazul conectării lor în paralel, ieșirea este dată de ieșirile însumate ale ambelor sisteme, ecuația întregului sistem astfel obținut fiind dată de

$$y = \mathcal{H}_1 \{ x \} + \mathcal{H}_2 \{ x \}$$

SISTEM FĂRĂ MEMORIE

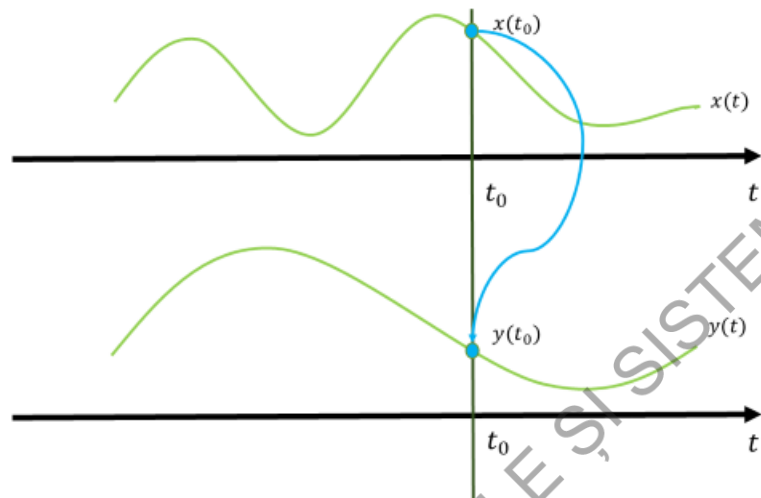
SISTEM CU MEMORIE

Un sistem, de intrare x și ieșire y , se numește **sistem fără memorie** dacă, pentru orice valoare reală t_0 , ieșirea $y(t_0)$ va depinde numai de intrarea $x(t_0)$ de la momentul t_0 .

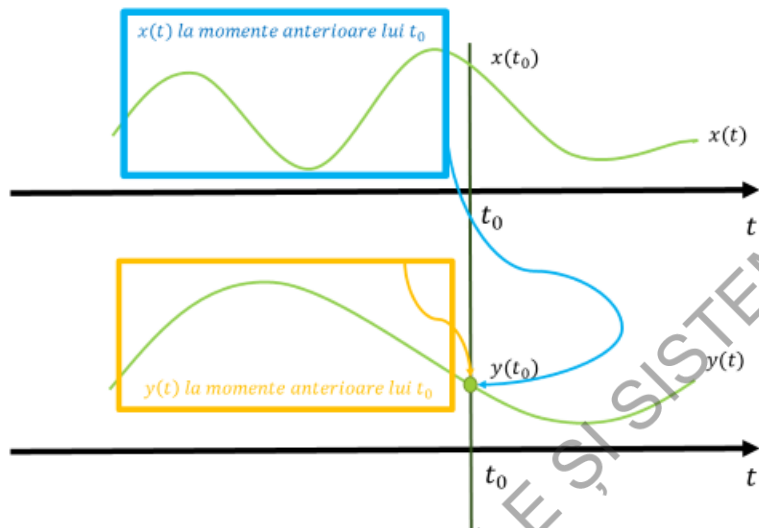
În caz contrar, dacă sistemul nu îndeplinește această condiție, el este un **sistem cu memorie**.

Observație: Un sistem fără memorie nu are capacitatea de a stoca eventuale intrări sau ieșiri, el funcționând numai pe intrarea curentă.

SISTEM FĂRĂ MEMORIE



SISTEM CU MEMORIE



În acest caz ieșirea depinde de ceea ce aveam anterior, atât pe intrare, cât și pe ieșire.

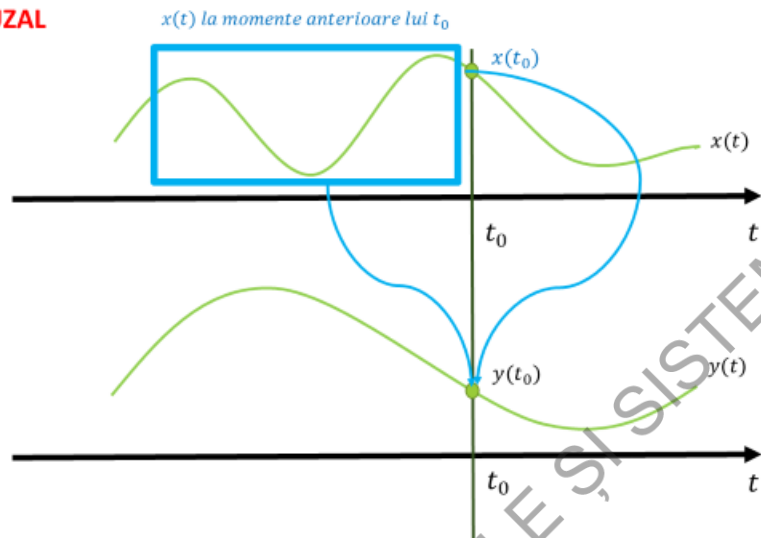
SISTEM CAUZAL

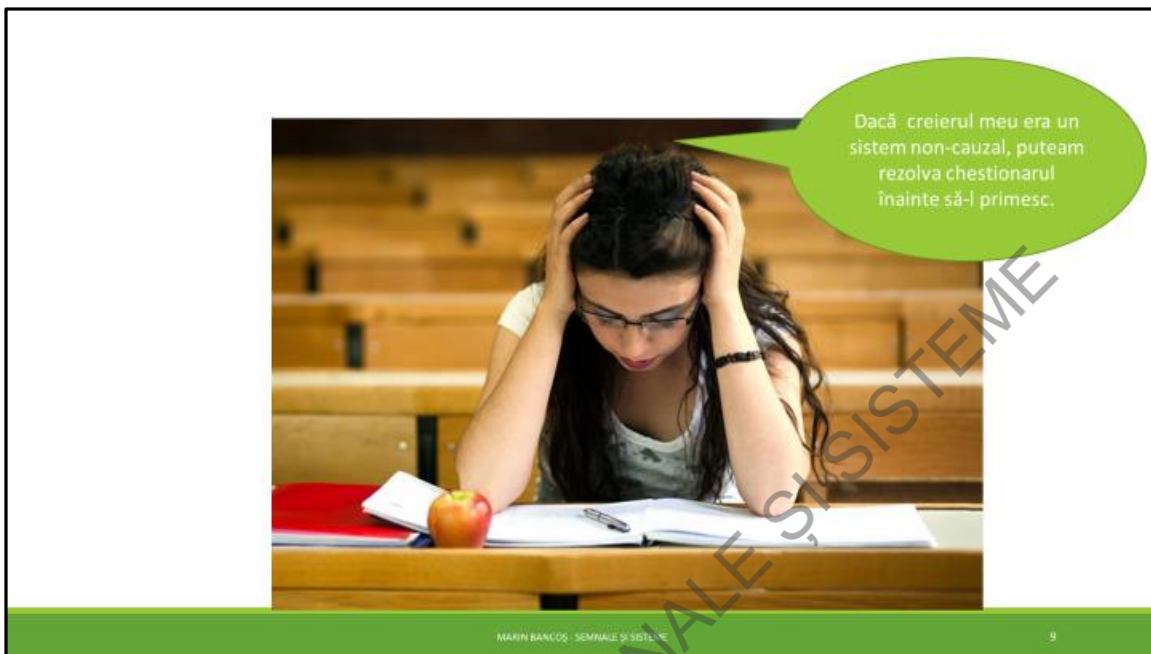
Un sistem, de intrare x și ieșire y , se numește **sistem cauzal** dacă, pentru orice valoare reală t_0 , ieșirea $y(t_0)$ depinde numai de intrarea $x(t)$ la momente de timp $t \leq t_0$ (adică la momente anterioare sau prezente) și nu depinde de intrarea $x(t)$ la momente $t > t_0$ (adică la momente viitoare).

Important: Un sistem trebuie să fie cauzal pentru a fi fizic realizabil.

Un sistem a cărui ieșire (sau răspuns), din orice moment, depinde numai de intrările prezente și trecute, dar nu și de cele viitoare, se numește *sistem cauzal*. Pentru un sistem cauzal, ieșirea (sau răspunsul) nu începe înainte ca semnalul de intrare să fie aplicat. Efectul (care reprezintă răspunsul sau ieșirea sistemului) nu se manifestă înaintea cauzei (care reprezintă excitația sau intrarea sistemului)! De aceea, un sistem cauzal este numit și sistem non-anticipativ.

SISTEM CAUZAL





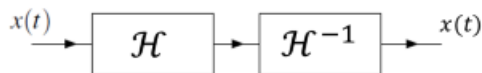
Dacă telefonul tău mobil nu ar fi fost un sistem cauzal, putea suna de pe acum pentru apelurile viitoare...

Dar aproape toate sistemele din viața reală sunt cauzale!

SISTEM INVERS. SISTEM INVERSABIL.

Fiind dat un sistem $\mathcal{H}$, prin conectarea sa în cascadă cu **sistemul** său **invers**, notat cu $\mathcal{H}^{-1}$, se obține pe ansamblu un sistem la care intrarea și ieșirea sunt egale.

Un **sistem** se numește **inversabil** dacă acesta posedă un sistem invers.



- Pentru a demonstra că un sistem este inversabil este suficient să-i determinăm sistemul invers.
- Un sistem inversabil va furniza întotdeauna semnale de ieșire diferite pentru semnale de intrare diferite.
- Pentru a demonstra că un sistem nu este inversabil, este suficient să găsim două semnale de intrare diferite la care le corespund semnale de ieșire identice.

SISTEM STABIL

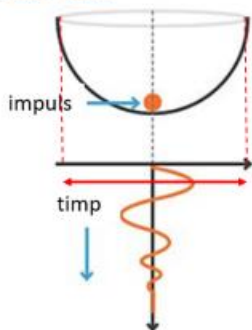
Un sistem de intrare x și ieșire y se numește **sistem stabil** (sau **BIBO-stabil**, de la Bounded Input - Bounded Output, adică Intrare Mărginită – Ieșire Mărginită), dacă

$$|x(t)| < \infty, (\forall)t \Rightarrow |y(t)| < \infty, (\forall)t$$

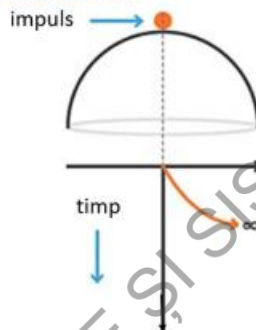
Pentru a demonstra că un sistem este stabil trebuie să demonstrăm că fiecărui semnal de intrare mărginit îi corespunde un semnal de ieșire mărginit.
Pentru a demonstra că un sistem nu este stabil este suficient să arătăm că există un singur semnal de intrare mărginit căruia îi corespunde un semnal de ieșire nemărginit.

Ilustrarea stabilității unui sistem

Sistem stabil



Sistem instabil



Considerăm un sistem format dintr-o bilă și un vas, aranjate așa cum se arată mai sus.

SISTEM STABIL

În primul caz, bila se află în interiorul vasului. O mică lovitură va face ca bila să oscileze în jurul poziției sale de echilibru și în cele din urmă se va așeza înapoi în poziția inițială.

SISTEM INSTABIL

În al doilea caz, bila este așezată deasupra vasului răsturnat. O mică lovitură în acest caz ar face ca bila să cadă de pe bol și nu s-ar întoarce niciodată la poziția inițială, decât dacă o luați voi și o puneți înapoi.

Acum, să revenim la primul caz în care bila se află în interiorul vasului. Ce se întâmplă dacă lovesc bila atât de tare încât zboară din vas? Va reveni ea la poziția inițială? Este un NU evident. Deci, este sistemul instabil? Sistemul este stabil, dar excitarea lui cu un impuls prea puternic face dificilă aprecierea dacă sistemul este stabil sau nu. Acest lucru ne conduce la conceptul de intrare mărginită.

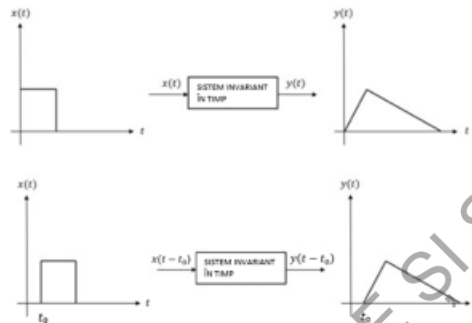
Se spune că o intrare este mărginită dacă intrarea se află între niște limite clar definite ale sistemului. Dacă nu este între acele limite, atunci intrarea este una nemărginită.

SISTEM INVARIANT ÎN TIMP

Se numește **sistem invariant în timp** un sistem la care, pentru orice semnal de intrare, $x(t)$, pentru care sistemul furnizează un răspuns $y(t)$, semnalului de intrare, $x(t - t_0)$, deplasat în timp cu un t_0 oarecare, îi va corespunde răspunsul $y(t - t_0)$, deplasat în timp cu exact același t_0 .

$$y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\} \Leftrightarrow y(t - t_0) = \mathcal{H}\{x(t - t_0)\},$$

EXEMPLU DE SISTEM INVARIANT ÎN TIMP



MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

14

Cu alte cuvinte, sistemul invariant în timp răspunde pe ieșire cu o deplasare în timp identică cu cea a semnalului de intrare.

În cazul unui sistem invariant în timp comportamentul acestuia nu se schimbă în raport cu timpul.

SISTEM ADITIV. SISTEM OMOGEN. SISTEM LINIAR.

Un sistem $\mathcal{H}$ se numește **sistem aditiv** dacă, oricare ar fi semnalele x_1 și x_2 , este îndeplinită următoarea condiție

$$\mathcal{H}\{x_1 + x_2\} = \mathcal{H}\{x_1\} + \mathcal{H}\{x_2\}$$

Un sistem $\mathcal{H}$ se numește **sistem omogen** dacă, pentru orice semnal x și orice constantă complexă a , este îndeplinită următoarea condiție

$$\mathcal{H}\{ax\} = a\mathcal{H}\{x\}$$

Un sistem care este aditiv și omogen se numește **sistem liniar**.

Cu alte cuvinte, un sistem $\mathcal{H}$ este un sistem liniar, dacă oricare ar fi semnalele x_1 și x_2 , respectiv constantele complexe a_1 și a_2 , este îndeplinită următoarea condiție

$$\mathcal{H}\{a_1 x_1 + a_2 x_2\} = a_1 \mathcal{H}\{x_1\} + a_2 \mathcal{H}\{x_2\}$$

SISTEM ANALOGIC LINIAR ȘI INVARIANT ÎN TIMP (SALIT)

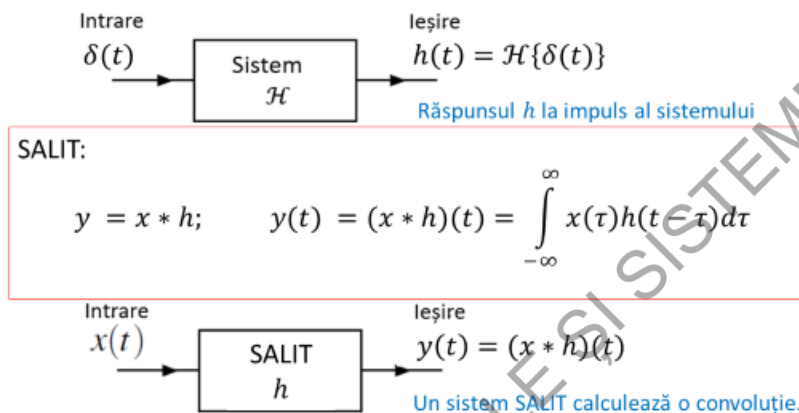
De ce le studiem?

În general, sistemele analogice liniare și invariante în timp (SALIT) joacă un rol foarte important. De aceea au fost dezvoltate instrumente matematice foarte puternice pentru analiza acestor sisteme.

Ele sunt mult mai ușor de analizat decât sistemele care nu prezintă proprietățile de liniaritate și invarianță în timp.

În practică, sistemele care nu sunt SALIT pot fi bine approximate folosind aceste tipuri de sisteme ca modele.

RĂSPUNSUL LA IMPULS AL UNUI SISTEM



Răspunsul notat cu h , al unui sistem $\mathcal{H}$, atunci când la intrarea sistemului este impulsul Dirac-delta, δ , respectiv răspunsul $h = \mathcal{H}\{\delta\}$, se numește **răspunsul la impuls** al sistemului.

Pentru orice SALIT, de intrare x , ieșire y și răspuns la impuls h , se poate demonstra că următoarea relație este valabilă:

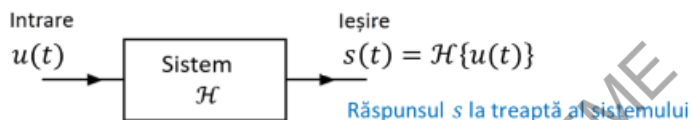
$$y = x * h$$

Așadar, *un SALIT calculează o convoluție.*

În plus, *un SALIT este complet caracterizat de răspunsul său h la impuls.* Aceasta înseamnă că dacă răspunsul la impuls al unui SALIT este cunoscut, putem determina răspunsul sistemului la orice semnal de intrare.

Răspunsul la impuls al unui SALIT fiind atât de util, suntem foarte interesați să-l determinăm. Din păcate, în practică, răspunsul la impuls al unui SALIT nu poate fi determinat direct din definiția răspunsului sistemului la impuls.

RĂSPUNSUL LA TREAPTĂ AL UNUI SISTEM



$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

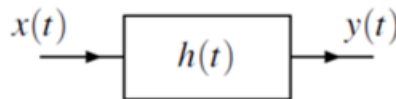
Răspunsul s al unui sistem $\mathcal{H}$ ce are pe intrare semnalul treaptă unitate u , respectiv răspunsul $s = \mathcal{H}\{u\}$, se numește *răspunsul la treaptă* al sistemului.

Se poate demonstra că răspunsul la impuls, h , și răspunsul la treaptă, s , ale unui sistem, sunt legate prin relația:

$$h(t) = \frac{ds(t)}{dt}$$

Prin urmare, răspunsul la impuls al unui sistem poate fi determinat chiar din răspunsul acestuia la treaptă, prin operația de derivare. Răspunsul la treaptă al unui sistem oferă un mijloc practic de determinare a răspunsului la impuls al unui sistem.

DIAGRAMA BLOC PRIN CARE SE REPREZINTĂ UN SALIT

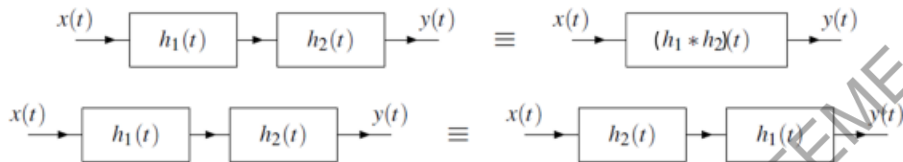


Adesea, este convenabil să reprezentăm un SALIT sub formă de diagramă bloc.

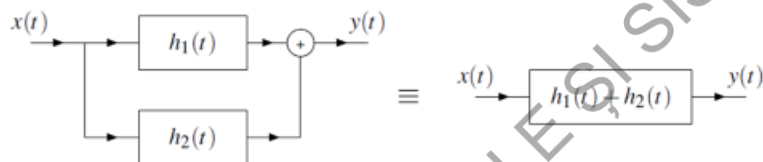
Deoarece astfel de sisteme sunt complet caracterizate de răspunsul lor la impuls, etichetăm un astfel de sistem chiar cu $h(t)$. Așadar, reprezentăm un SALIT cu intrarea x , ieșirea y și răspunsul său la impuls h , după cum se arată în slide.

INTERCONECTAREA SALIT

SERIE



PARALEL



MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

20

Interconectarea în serie a două SALIT, de răspunsuri la impuls h_1 și h_2 , este un SALIT având răspunsul la impuls $h = h_1 * h_2$.

Comutativitatea convoluției ne asigură echivalența din slide.

Interconectarea în paralel a două SALIT, cu răspunsuri la impuls h_1 și h_2 , este un SALIT cu răspunsul la impuls $h = h_1 + h_2$.

SALIT FĂRĂ MEMORIE

Un SALIT, având răspunsul la impuls h , este sistem fără memorie dacă și numai dacă:

$$h(t) = 0, (\forall)t \neq 0.$$

Un SALIT este sistem fără memorie dacă și numai dacă răspunsul său la impuls, h , este de forma:

$$h(t) = K\delta(t),$$

unde K este o constantă complexă.

În consecință, orice SALIT fără memorie, cu intrarea x și ieșirea y , este caracterizat printr-o ecuație de forma:

$$y = x * (K\delta) = Kx$$

Un astfel de sistem este, așadar, un amplificator ideal.

Un SALIT, având răspunsul la impuls h , este sistem fără memorie dacă și numai dacă:

$$h(t) = 0, (\forall)t \neq 0.$$

Un SALIT este sistem fără memorie dacă și numai dacă răspunsul său la impuls, h , este de forma:

$$h(t) = K\delta(t),$$

unde K este o constantă complexă.

În consecință, orice SALIT fără memorie, cu intrarea x și ieșirea y , este caracterizat printr-o ecuație de forma:

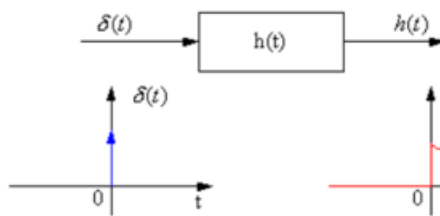
$$y = x * (K\delta) = Kx$$

Un astfel de sistem este, așadar, un amplificator ideal.

Pentru un SALIT, condiția de sistem fără memorie este una extrem de restrictivă, ținând cont că fără memorie înseamnă amplificator ideal.

SALIT CAUZAL

Un **SALIT**, având răspunsul la impuls h , este **cauzal** dacă și numai dacă $h(t) = 0$, pentru $(\forall)t < 0$



Datorită relației de mai sus numim semnalul oarecare x , care satisface condiția $x(t) = 0$, pentru $(\forall)t < 0$, ca fiind un **semnal cauzal**.

SALIT INVERSABIL

Inversul unui SALIT, dacă un astfel de sistem există, este tot un SALIT.

Fie h și h_{inv} răspunsurile la impuls al unui SALIT și respectiv al inversului acestuia. Atunci:

$$h * h_{inv} = \delta$$

În consecință, un SALIT cu răspunsul la impuls h este inversabil dacă și numai dacă există o funcție h_{inv} astfel încât să se îndeplinească condiția:

$$h * h_{inv} = \delta$$

Cu excepția cazurilor simple, condiția de mai sus este adesea destul de dificil de testat.

SALIT BIBO-STABIL

Un SALIT, având răspunsul la impuls notat cu h , este BIBO-stabil dacă și numai dacă h este o funcție absolut integrabilă, respectiv:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

FUNCȚII PROPRII ȘI VALORI PROPRII

O intrare x a unui sistem $\mathcal{H}$ este o *funcție proprie* a sistemului dat, de *valoare proprie* λ , dacă ieșirea y a sistemului este de forma

$$y = \mathcal{H}\{x\} = \lambda x,$$

unde λ este o constantă complexă.

Funcția proprie se mai numește în literatura de specialitate și vector propriu, funcția fiind văzută ca element al spațiului vectorial în care se operează. Sistemul $\mathcal{H}$ acționează ca un amplificator ideal pentru fiecare dintre funcțiile proprii x , iar câștigul amplificatorului este dat de valoare proprie corespunzătoare λ . Sistemele diferite au funcții proprii diferite. De un interes deosebit sunt funcțiile proprii ale SALIT.

EXPONENȚIALA COMPLEXĂ ESTE FUNCȚIE PROPRIE PENTRU UN SALIT

Orice exponențială complexă este funcție proprie pentru un SALIT oarecare.

Pentru un SALIT, caracterizat prin operatorul (sau transformarea) $\mathcal{H}$ și având răspunsul la impuls h , are loc relația

$$\mathcal{H}\{e^{st}\} = H(s)e^{st},$$

unde s este o constantă complexă, iar $H(s)$, adică valoarea proprie corespunzătoare funcției proprii e^{st} , este dată prin

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt.$$

H se numește *funcție de transfer* (sau *funcție de sistem*) a sistemului $\mathcal{H}$.

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

26

Se poate demonstra că orice exponențială complexă este funcție proprie pentru un SALIT oarecare.

Pentru un SALIT caracterizat prin operatorul (sau transformarea) $\mathcal{H}$, având răspunsul la impuls h , are loc relația

$$\mathcal{H}\{e^{st}\} = H(s)e^{st},$$

unde s este o constantă complexă, iar $H(s)$ este dat prin

$$H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt.$$

Cu alte cuvinte, avem:

$$\underbrace{\mathcal{H}\{e^{st}\}}_y = \underbrace{H(s)}_\lambda \underbrace{e^{st}}_x$$

adică, e^{st} este o *funcție proprie* pentru SALIT, iar $H(s)$ este *valoarea proprie* corespunzătoare acesteia.

Vom numi H *funcție de transfer* (sau *funcție de sistem*) a sistemului $\mathcal{H}$. Ați observat că relația de calcul a acesteia seamănă cu transformata Fourier a lui h ?

Rețineți, deci, că la un SALIT oarecare, având pe intrare o exponențială complexă, pe ieșire regăsim exact aceeași exponențială, multiplicată cu constanta complexă $H(s)$.

REPREZENTAREA SEMNALELOR FOLOSIND EXPONENȚIALE COMPLEXE

Fie un SALIT de intrare x , ieșire y și funcție de transfer H .

Dacă intrarea x poate fi exprimată ca fiind combinație liniară de exponențiale complexe

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t},$$

unde a_k și s_k sunt constante complexe, atunci vom avea:

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}.$$

Dacă o intrare într-un SALIT poate fi exprimată ca o combinație liniară de exponențiale complexe, atunci ieșirea respectivului SALIT poate fi exprimată și ea ca o combinație liniară a acelorași exponențiale complexe.

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

27

Considerăm un SALIT cu intrarea x , ieșirea y și funcția de transfer H .

Să presupunem că intrarea x poate fi exprimată ca fiind combinație liniară de exponențiale complexe

$$x(t) = \sum_k a_k e^{s_k t},$$

unde a_k și s_k sunt constante complexe.

Folosind faptul că exponențialele complexe sunt funcții proprii pentru SALIT, putem concluziona că

$$y(t) = \sum_k a_k H(s_k) e^{s_k t}.$$

Așadar, dacă o intrare într-un SALIT poate fi exprimată ca o combinație liniară de exponențiale complexe, atunci ieșirea respectivului SALIT poate fi exprimată și ea ca o combinație liniară a acelorași exponențiale complexe. Formula poate fi utilizată pentru a determina răspunsul unui SALIT funcție de intrarea sa într-un mod care nu necesită calcul de convoluție.

RĂSPUNSUL ÎN FRECVENȚĂ AL UNUI SALIT

Pentru un SALIT, caracterizat prin $\mathcal{H}$ și având răspunsul la impuls h , are loc relația

$$\mathcal{H}\{e^{st}\} = H(s)e^{st}, \quad \text{cu: } H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt$$

Pentru un SALIT, caracterizat prin $\mathcal{H}$ și având răspunsul la impuls h , în cazul unei sinusoide complexe de forma:

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t),$$

unde ω este o constantă reală, vom avea

$$\mathcal{H}\{e^{j\omega t}\} = H(j\omega)e^{j\omega t}, \quad \text{cu } H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt.$$

$H(j\omega)$ - răspunsul în frecvență al sistemului $\mathcal{H}$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

28

Am văzut că pentru un SALIT, caracterizat prin $\mathcal{H}$ și având răspunsul la impuls h , are loc relația

$$\mathcal{H}\{e^{st}\} = H(s)e^{st}, \quad \text{cu } H(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-st} dt,$$

consecință a faptului că o exponențială complexă este funcție proprie pentru un SALIT oarecare.

Deoarece o sinusoidă complexă este un caz particular al unei exponențiale complexe, putem reutiliza rezultatul de mai sus pentru cazul special al sinusoidelor complexe.

Pentru un SALIT, caracterizat prin $\mathcal{H}$ și având răspunsul la impuls h , în cazul unei sinusoide complexe de forma

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t),$$

unde ω este o constantă reală, vom avea

$$\mathcal{H}\{e^{j\omega t}\} = H(j\omega)e^{j\omega t}, \quad \text{cu } H(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt.$$

În acest caz particular, $e^{j\omega t}$ este funcție proprie a SALIT, iar $H(j\omega)$ este valoarea proprie corespunzătoare.

Ne vom referi la $H(j\omega)$ ca la **răspunsul în frecvență al sistemului $\mathcal{H}$** .

Acesta este, așadar, nimeni altcineva decât transformata Fourier a răspunsului la impuls, h , al sistemului.

SALIT ȘI SERIILE FOURIER

Fie un SALIT de intrare x , ieșire y și funcție de transfer H .

Presupunând că pe intrarea SALIT se furnizează un semnal periodic, de perioadă T , a cărei exprimare cu ajutorul SFE este dată de:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} \cdot e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T},$$

pe ieșire se va culege:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} \cdot H(jn\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

29

Considerăm un SALIT cu intrarea x , ieșirea y și răspunsul în frecvență $H(j\omega)$.

Presupunând că pe intrarea SALIT se furnizează un semnal periodic, de perioadă T , a cărei exprimare cu ajutorul SFE este dată de:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} \cdot e^{jn\omega_0 t}, \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T},$$

pe ieșire se va culege:

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} \cdot H(jn\omega_0) \cdot e^{jn\omega_0 t}$$

Așadar, dacă intrarea SALIT se exprimă cu ajutorul SFE, și ieșirea este tot de tipul SFE.

$$x(t) \leftrightarrow A_{nc} \Rightarrow y(t) \leftrightarrow H(jn\omega_0) \cdot A_{nc}$$

Formula obținută poate fi utilizată pentru a calcula semnalul de pe ieșirea unui SALIT, funcție de semnalul de pe intrarea sa și de răspunsul în frecvență al sistemului, fără a mai fi nevoie de convoluție.

FUNCȚIONAREA UNUI SALIT ÎN DOMENIUL FRECVENȚĂ

Considerăm un SALIT cu intrarea x , ieșirea y și răspunsul la impuls h .
Fie X, Y și H transformatele Fourier ale lui x, y și h .
Deoarece avem

$$y(t) = (x * h)(t)$$

obținem, folosind proprietățile transformatei Fourier, că

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega),$$

sau, folosind notația alternativă, mai simplă, avem

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega).$$

unde, așa cum am stabilit, H este răspunsul în frecvență al sistemului.

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

30

Considerăm un SALIT cu intrarea x , ieșirea y și răspunsul la impuls h .
Fie X, Y și H transformatele Fourier ale lui x, y și h .
Deoarece avem

$$y(t) = (x * h)(t)$$

obținem, folosind proprietățile transformatei Fourier, că

$$Y(j\omega) = X(j\omega) \cdot H(j\omega),$$

sau folosind notația mai simplă

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega).$$

Așa cum am stabilit, H este răspunsul în frecvență al sistemului.

Ecuția de mai sus oferă o nouă alternativă de vizualizare a comportamentului SALIT. Astfel, putem vedea sistemul funcționând în domeniul frecvență, folosind transformatele Fourier ale semnalelor de pe intrare și ieșire. Densitatea spectrală corespunzătoare semnalului de pe ieșirea sistemului este dată de produsul dintre densitatea spectrală corespunzătoare semnalului de pe intrare și răspunsul în frecvență al sistemului.

FUNCȚIONAREA UNUI SALIT ÎN DOMENIUL FRECVENȚĂ

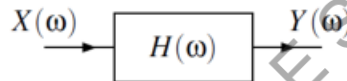
Răspunsul în frecvență, H , este o funcție complexă. Exprimăm $H(\omega)$ în funcție de amplitudinea $|H(\omega)|$ și argumentul $\arg H(\omega)$ și obținem:

$$Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega) \Rightarrow |Y(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)| \text{ și } \arg Y(\omega) = \arg X(\omega) + \arg H(\omega)$$

Deoarece răspunsul în frecvență, H , este transformata Fourier a răspunsului la impuls h , în cazul în care h este o funcție reală avem

$$|H(\omega)| = |H(-\omega)| \text{ (paritate)}$$

$$\arg H(\omega) = -\arg H(-\omega) \text{ (imparitate)}$$



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

31

În general răspunsul în frecvență, H , este o funcție complexă, nu neapărat reală.

Adesea reprezentăm $H(\omega)$ în funcție de amplitudinea sa $|H(\omega)|$ și argumentul $\arg H(\omega)$.

Deoarece $Y(\omega) = X(\omega) \cdot H(\omega)$, avem imediat că $|Y(\omega)| = |X(\omega)| \cdot |H(\omega)|$ și $\arg Y(\omega) = \arg X(\omega) + \arg H(\omega)$.

Deoarece răspunsul în frecvență, H , este transformata Fourier a răspunsului la impuls h , dacă h este reală avem

$$|H(\omega)| = |H(-\omega)| \text{ (paritate) și}$$

$$\arg H(\omega) = -\arg H(-\omega) \text{ (imparitate).}$$

DESCRIEREA SALIT PRIN ECUAȚII DIFERENȚIALE LINIARE CU COEFICIENȚI CONSTANȚI

$$\sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t) \quad M \leq N$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k j^k \omega^k}{\sum_{k=0}^N b_k j^k \omega^k}$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

32

Multe SALIT de interes practic pot fi reprezentate folosind o ecuație diferențială liniară de ordinul al N-lea cu coeficienți constanți. Să considerăm un sistem de intrare x și ieșire y care este caracterizat printr-o ecuație de forma dată în slide.

Fie h răspunsul la impuls al sistemului și fie X, Y și H transformatele Fourier ale lui x, y și h .

Se poate arăta că H este dat de raportul din slide.

Observați că, pentru un sistem de forma considerată mai sus, răspunsul în frecvență este o funcție rațională.