

CURSUL 6

TRANSFORMATĂ FOURIER DIRECTĂ ȘI TRANSFORMATĂ FOURIER INVERSĂ.

PROPRIETĂȚILE TRANSFORMATEI FOURIER.

SPECTRUL DE AMPLITUDINI ȘI SPECTRUL DE FAZE ÎN CAZUL SEMNALELOR NEPERIODICE.

REFLECTAREA PARITĂȚII ȘI IMPARITĂȚII SEMNALULUI ÎN EXPRIMAREA TRANSFORMATEI FOURIER.

ENERGIE. TIPURI DE IMPULSURI UTILIZATE.

DETERMINAREA TRANSFORMATEI FOURIER PENTRU IMPULSUL DIRAC-DELTA ȘI PENTRU SEMNALUL TREAPTĂ UNITATE.

ETAPE URMATE ÎN ANALIZA FOURIER A UNUI SEMNAL NEPERIODIC ÎN TIMP CONTINUU. EXEMPLE.

CONVOLUȚIA ÎN DOMENIUL TIMP ȘI ÎN DOMENIUL FRECVENȚĂ.

Iată ce ne propunem să parcurgem în cursul de astăzi, detaliind chestiuni ce țin de introducerea și utilizarea transformatei Fourier, directe și inverse, etapele urmate în analiza Fourier a unui semnal neperiodic în timp continuu și utilizarea convoluției în timp și frecvență.

Seria Fourier trigonometrică – SFT

$$x(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n \omega_0 t) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(n \omega_0 t)$$

Seria Fourier armonică – SFA

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos(n \omega_0 t + \varphi_n) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n \omega_0 t + \varphi_n)$$

Furnizează spectrul (unilateral) de frecvențe

Seria Fourier exponențială (complexă) SFE (SFC)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{jn \omega_0 t} \quad A_{nc} = \frac{1}{T} \int_T x(t) e^{-jn \omega_0 t} dt$$

Furnizează spectrul bilateral de frecvențe

$$C_0 = \frac{1}{T} \int_T x(t) dt$$

$$C_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \cos(n \omega_0 t) dt$$

$$S_n = \frac{2}{T} \int_T x(t) \sin(n \omega_0 t) dt$$

$$A_n = \sqrt{C_n^2 + S_n^2}$$

$$\varphi_n = -\arctg \frac{S_n}{C_n}$$

$$A_0 = C_0$$

$$A_{nc} = |A_{nc}| e^{j\phi_n}$$

$$A_{0c} = C_0 = A_0$$

$$A_{nc} = \frac{C_n - jS_n}{2}$$

$$A_{-nc} = \frac{C_n + jS_n}{2}$$

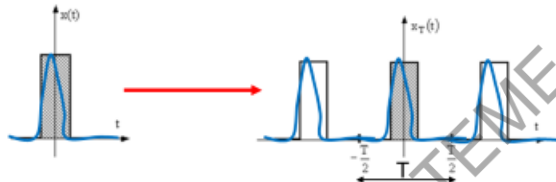
$$\begin{cases} |A_{nc}| = |A_{-nc}| = \frac{A_n}{2} \\ \phi_n = \varphi_n = -\arctg \frac{S_n}{C_n} \end{cases}$$

În acest slide sunt reunite toate informațiile necesare utilizării celor trei tipuri de dezvoltări în serie Fourier pentru un semnal periodic în timp continuu.

Cum se procedează, însă, în cazul în care avem de-a face cu un semnal neperiodic? Instrumentul matematic utilizat în acest caz este *transformata Fourier*, împreună cu inversa acesteia. La aceasta se ajunge cu rezultatele obținute până în prezent la SFE, considerând semnalul neperiodic ca fiind unul periodic de perioadă infinită.

TRANSFORMATĂ FOURIER DIRECTĂ ȘI TRANSFORMATĂ FOURIER INVERSĂ

Un semnal neperiodic, de durată finită, poate fi considerat, la limită, ca fiind un semnal periodic căruia perioada T îi tinde la infinit.



$x(t)$ – semnal neperiodic (limitat pe axa timpului)

$x_T(t)$ – prelungire periodică, de perioadă T , a semnalului dat $x(t)$

Transformata Fourier inversă sau originalul $x(t)$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\omega) e^{j\omega t} d\omega = F^{-1}\{X(j\omega)\}$$

Transformata Fourier directă a semnalului neperiodic $x(t)$

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt$$

$$x_T(t) \equiv \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{jn\omega_0 t}$$

SFE

$$A_{nc} = \frac{1}{T} \int_T x_T(t) e^{-jn\omega_0 t} dt$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

3

Așa cum spuneam, cele discutate anterior sunt valabile pentru semnale analogice periodice. Cum procedăm, însă, în cazul semnalelor neperiodice? Ne vom folosi de rezultatele obținute apelând la un artificiu. Un semnal neperiodic, de durată finită, poate fi considerat, la limită, ca fiind un semnal periodic căruia perioada T îi tinde la infinit. Haideți să ilustrăm acest lucru cu un exemplu.

Semnalul neperiodic trebuie să fie de durată finită, adică ceea ce numim impuls, pentru ca această construcție să fie posibilă.

La limită, semnalul $x_T(t)$ va avea practic o singură perioadă, pe întreg domeniul timp, fiind reprezentat prin $x(t)$.

Urmărim pe slide raționamentul introducerii noilor instrumente matematice, utilizate în cazul semnalelor neperiodice în timp continuu.

Expresia *transformatei Fourier directe* poate fi obținută, folosind această construcție și rezultatele cunoscute de la SFE, făcându-l pe T să tindă la infinit și utilizând artificii matematice asupra cărora nu este cazul să insistăm.

Limitele se schimbă de la cele finite, $-T/2$ și $+T/2$, corespunzătoare perioadei T , la limitele infinite $-\infty$ și $+\infty$.

Pulsația ω va putea lua orice valoare, variind continuu, și nu numai în multiplii pulsației fundamentale, $n\omega_0$.

Să facem observația că se utilizează pentru transformata Fourier a semnalului $x(t)$ atât notația $X(j\omega)$, cât și notația $X(\omega)$.

La $x(t)$ ajungem folosind *transformata Fourier inversă*, a cărei formulă este dată în slide.

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

Definirea transformatei Fourier directe și inverse

Transformata Fourier (directă) a funcției $x(t)$, notată prin $\mathcal{F}\{x(t)\}$, $X(j\omega)$ sau simplu prin $X(\omega)$, se definește prin

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = X(j\omega) = X(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt.$$

Transformata Fourier inversă a lui X , notată cu $\mathcal{F}^{-1}\{X\}$ sau cu x , este dată prin relația

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} X(j\omega)e^{j\omega t} dt = \mathcal{F}^{-1}\{X\}.$$

Perechea determinată de transformata Fourier, în domeniile timp și frecvență, este notată prin

$$x(t) \overset{TF}{\leftrightarrow} X(j\omega) = X(\omega)$$

Hai deți să reținem relațiile de definiție pentru transformata Fourier directă și inversă.

Ne punem însă întrebarea: când există transformata Fourier? Aceasta sigur există atunci când sunt respectate condițiile Dirichlet.

Condițiile Dirichlet – condiții suficiente pentru existența transformatei Fourier

Dacă semnalul neperiodic în timp continuu $x(t)$

- are un număr finit de maxime și minime în interiorul oricărui interval finit;
- are un număr finit de discontinuități în interiorul oricărui interval finit;
- este o funcție absolut integrabilă, respectiv:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty,$$

atunci transformata Fourier a acestui semnal există.

Vom avea:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \right| \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t) \cdot e^{-j\omega t}| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| \cdot \underbrace{|e^{-j\omega t}|}_{=1} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)| dt < \infty$$
$$(\exists) F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Dacă:

- Semnalul are un număr finit de maxime și minime în interiorul oricărui interval finit;
- Semnalul are un număr finit de discontinuități în interiorul oricărui interval finit;

atunci, o condiție suficientă pentru existența transformatei Fourier este absoluta integrabilitate.

Primele două condiții nu sunt critice. Ele se verifică, în general, fără nicio dificultate pentru semnalele cu care lucrăm. Cea de a treia condiție este, însă, mai dificil de verificat.

Semnificația fizică a condiției de absolută integrabilitate constă în aceea că impunem ca aria dintre graficul curbei $x(t)$ și axa orizontală să fie una finită.

Proprietățile transformatei Fourier

Proprietatea	Domeniu timp	Domeniu frecvență
Liniaritate	$a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$	$a_1X_1(\omega) + a_2X_2(\omega)$
Deplasare în timp	$x(t - t_0)$	$e^{-j\omega t_0} X(\omega)$
Deplasare în frecvență	$e^{j\omega_0 t} x(t)$	$X(\omega - \omega_0)$
Schimbare scară timp	$x(at)$	$\frac{1}{ a } X\left(\frac{\omega}{a}\right)$
Conjugata complexă	$x^*(t)$	$X^*(-\omega)$
Dualitate	$X(t)$	$2\pi x(-\omega)$
Convoluție în timp	$(x_1 * x_2)(t)$	$X_1(\omega)X_2(\omega)$
Produs în timp	$x_1(t)x_2(t)$	$\frac{1}{2\pi}(X_1 * X_2)(\omega)$
Derivare în timp	$\frac{d}{dt}x(t)$	$j\omega X(\omega)$
Derivare în frecvență	$tx(t)$	$j\frac{d}{d\omega}X(\omega)$
Integrare în timp	$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$	$\frac{1}{j\omega}X(\omega) + \pi X(0)\delta(\omega)$

(dacă $X(0)=0$)

Se utilizează pentru transformata Fourier, a semnalului $x(t)$, atât notația $X(\omega)$, cât și notația $X(j\omega)$.

Spectrul de amplitudini și spectrul de faze pentru semnale neperiodice

Spectrul unui semnal neperiodic este unul continuu.

Transformata Fourier a semnalului neperiodic $x(t)$, dată prin:

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt,$$

mai este numită și *funcție spectrală* sau *funcție de densitate spectrală de amplitudine complexă*.

Aceasta există pentru orice pulsație ω (sau frecvență f) și se scrie cu ajutorul modulului și fazei astfel:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)},$$

unde $|X(j\omega)|$ este *spectrul de amplitudini*, iar $\varphi(\omega)$ este *spectrul de faze*.

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

7

Considerând că semnalul neperiodic este, de fapt, un semnal periodic de perioadă T infinită, atunci frecvența fundamentală f_0 devine tot mai mică, iar spectrul tot mai dens. La limită nu mai putem face nicio diferență între două componente spectrale succesive, acestea contopindu-se, iar spectrul există pentru orice pulsație ω (sau frecvență f).

Așadar *spectrul unui semnal neperiodic este unul continuu*, spre deosebire de cazul semnalului periodic, la care spectrul de frecvențe este discret.

Transformata Fourier a semnalului neperiodic $x(t)$, dată de:

$$F\{x(t)\} = X(j\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt,$$

mai este numită și *funcție spectrală* sau *funcție de densitate spectrală de amplitudine complexă*.

Ea există pentru orice pulsație ω (sau frecvență f).

Funcția de densitate spectrală este o funcție complexă ce poate fi scrisă cu ajutorul modulului și fazei astfel:

$$X(j\omega) = |X(j\omega)|e^{j\varphi(\omega)}$$

unde $|X(j\omega)|$ este *spectrul de amplitudini*, iar $\varphi(\omega)$ este *spectrul de faze*.

Paritatea / imparitatea și funcția de densitate spectrală a semnalelor neperiodice

$$\begin{aligned}
 F\{x(t)\} = X(j\omega) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) [\cos(-\omega t) + j \sin(-\omega t)] dt = \\
 &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) [\cos(\omega t) - j \sin(\omega t)] dt = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(\omega t) dt - j \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(\omega t) dt = A(\omega) - jB(\omega),
 \end{aligned}$$

unde am notat:

$$A(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \cos(\omega t) dt, B(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \sin(\omega t) dt, |X(j\omega)| = \sqrt{A^2(\omega) + B^2(\omega)}, \varphi(\omega) = -\arctan \frac{B(\omega)}{A(\omega)}.$$

Dacă semnalul $x(t)$ este par, atunci $B(\omega) = 0$ și $X(j\omega) = A(\omega)$, iar funcția de densitate spectrală este una pur reală.

Dacă semnalul $x(t)$ este impar, atunci $A(\omega) = 0$ și $X(j\omega) = -jB(\omega)$, iar funcția de densitate spectrală este una pur imaginară.

Studiem acum particularitățile transformatei Fourier în cazul parității, respectiv imparității semnalului căruia i se aplică.

Am ținut cont de faptul că produsul dintre o funcție pară și una impară este o funcție impară, iar integrala din funcția impară va fi nulă.

Energia în cazul semnalelor neperiodice

Considerând semnalul neperiodic ca fiind un impuls de tensiune sau unul de curent, aplicat unei rezistențe electrice de 1Ω , **energia totală** debitată este dată prin relația:

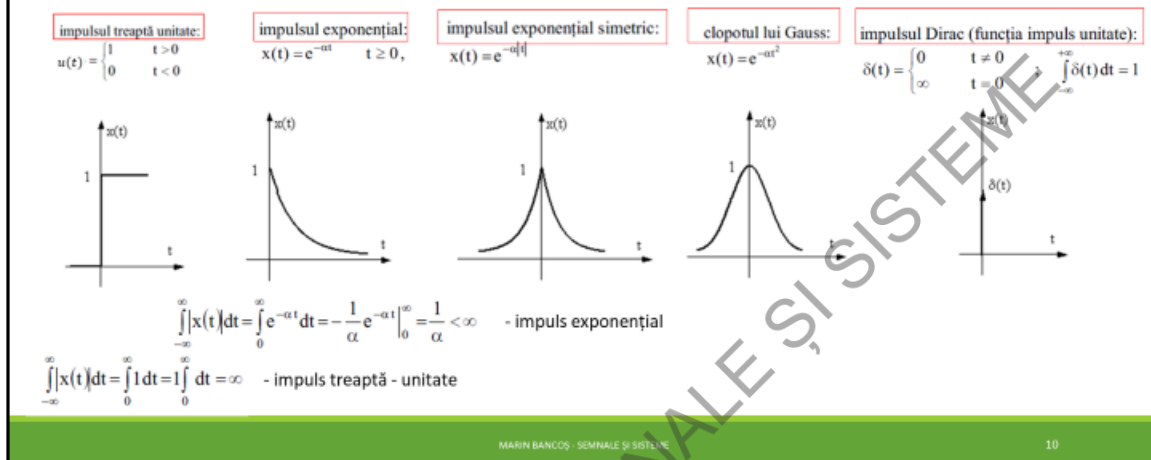
$$E = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2(t)dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} |X(j\omega)|^2 d\omega$$

$|X(j\omega)|^2$ – densitate spectrală de energie a impulsului

Să urmărim cum se calculează energia în cazul semnalelor care posedă transformată Fourier.

Această relație este un caz particular al teoremei lui Parseval, aplicată pentru semnale neperiodice în timp continuu.

Tipuri de impulsuri utilizate în teoria semnalelor



Vom evidenția acum câteva tipuri de impulsuri uzuale. În general, prin impuls înțelegem, în teoria semnalelor, un semnal determinist (adică un semnal care poate fi exprimat analitic printr-o funcție de un număr finit de parametri) ce are durată finită (adică suportul lui este limitat de două momente finite de timp, t_1 și t_2).

Cu ajutorul unui astfel de semnal am ajuns, de fapt, la definirea transformatei Fourier.

Reprezentarea unui impuls în domeniul timp poate lua cele mai diverse forme.

Următoarele semnale, date ca exemple, sunt asimilate cu impulsuri, deși limitele t_1 și t_2 , în cazul lor, nu mai sunt neapărat finite.

Totuși, și în astfel de cazuri se poate calcula transformata Fourier, din moment ce respectă condiția de absolută integrabilitate. Exemplificăm pe cazul impulsului exponențial, la care parametrul este o constantă reală strict pozitivă.

Mai mult, condiția de absolută integrabilitate fiind una suficientă, pentru existența transformatei Fourier, este evident că există și semnale neperiodice în timp continuu care nu sunt funcții absolut integrabile, dar pentru care transformata Fourier există.

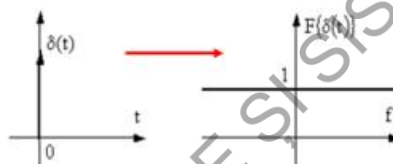
Un astfel de exemplu este chiar semnalul treaptă-unitate. Așa cum se poate vedea, acesta nu este absolut integrabil. Transformata sa Fourier există, totuși, și o vom calcula în curând.

Transformata Fourier a impulsului Dirac - delta

$$F\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-j\omega t} dt = e^0 \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \delta(t - t_0) dt = x(t_0) \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0) dt = x(t_0)$$

$$F\{\delta(t)\} = 1$$



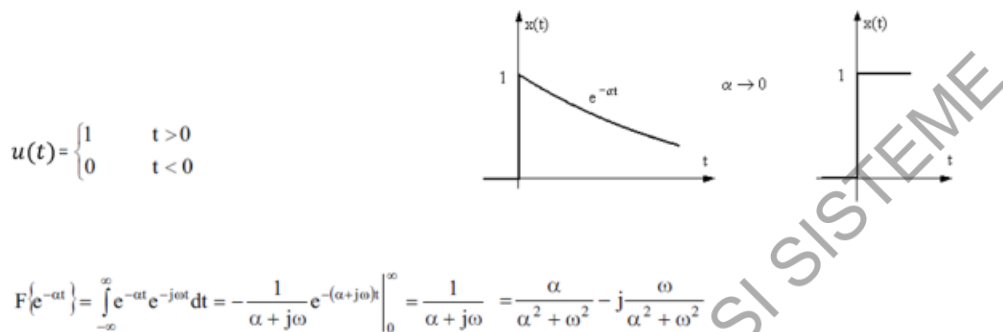
MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

11

Pentru calculul transformatei Fourier (a funcției de densitate spectrală) pentru impulsul Dirac-delta, utilizăm proprietatea sa de „sifting”, de extracție, evidențiată în cursurile anterioare. Să o reamintim.

Așadar transformata Fourier a impulsului Dirac-delta, adică densitatea spectrală de amplitudine, are valoarea 1 pe întreg domeniul de frecvență și, prin urmare, vom avea că energia totală a impulsului este infinită. Este evident, așadar, că un astfel de semnal nu este realizabil fizic.

De la impulsul exponențial la impulsul treaptă unitate



MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

12

Ne propunem acum să calculăm transformata Fourier a impulsului treaptă unitate. Acest semnal nu este unul absolut integrabil, deoarece, așa cum am arătat anterior, integrala modulului său este $+\infty$.

Aceasta nu înseamnă, însă, că impulsul treaptă unitate nu poate avea transformată Fourier, condiția de absolută integrabilitate nefiind una necesară, ci doar suficientă, așa cum am spus. Transformata Fourier a unui astfel de semnal, dacă există, se poate obține prin trecerea la limită a transformatei Fourier a unui impuls absolut integrabil.

În cazul nostru vom apela, pentru această intermediere, la impulsul exponențial. Să observăm că din impulsul exponențial, pentru $\alpha \rightarrow 0$, se obține impulsul treaptă unitate.

Transformata Fourier a acestuia are expresia din slide, integrala fiind calculată simplu, deoarece este vorba de o integrală definită dintr-o exponențială.

Să observăm, însă, că pentru cazul particular $\omega = 0$ se obține că limita, atunci când $\alpha \rightarrow 0$, α fiind pozitiv, raportul devine $+\infty$. Aceasta ar sugera că aici transformata Fourier a impulsului treaptă unitate nu există.

Continuăm calculele, înmulțind cu conjugata.

Vom obține numărul complex din slide.

Transformata Fourier a impulsului treaptă unitate

Partea
imaginară:

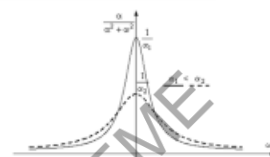
$$F\{e^{-\alpha t}\} = \frac{1}{\alpha + j\omega} = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} - j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}$$

$$\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha + j\omega}\right) = 0; \lim_{\alpha \rightarrow 0} \operatorname{Im}\left(\frac{1}{\alpha + j\omega}\right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(-j \frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}\right) = \frac{1}{j\omega}$$

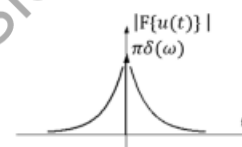
Partea
reală:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\alpha} \frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\alpha}\right)^2} d\omega = \int_{-\infty}^{\frac{\omega}{\alpha} = +\infty} \frac{1}{1 + v^2} dv = (\arctg v) \Big|_{-\infty}^{+\infty} = \pi$$

$$F\{u(t)\} = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left[F\{e^{-\alpha t}\} \right] = \pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$$



$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \operatorname{Re}\left(\frac{1}{\alpha + j\omega}\right) = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \left(\frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}\right) = \pi\delta(\omega)$$



MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

13

Studiem separat partea imaginară și partea reală a acestui număr complex. Pentru partea imaginară se obțin rezultatele evidențiate.

Pentru partea reală, analizând graficul acesteia, putem presupune că la limită avem de a face cu un impuls Dirac-delta, ponderat cu o constantă, deoarece cu cât $1/\alpha$ crește (adică α scade), cu atât și lățimea impulsului se îngustează, iar înălțimea sa crește. Ideal: $\alpha = 0$.

Calculul integralei, care reprezintă aria de sub grafic, ne furnizează valoarea acestei constante, ea fiind egală cu π și, deci, independentă de valoarea lui α . Limita părții reale, când $\alpha \rightarrow 0$, va avea așadar forma $\pi\delta(t)$.

Prin urmare, transformata Fourier a impulsului treaptă unitate este dată de expresia evidențiată în chenar, iar reprezentarea grafică a densității spectrale e cea din figură.

Transformate Fourier uzuale

	$x(t)$	$X(\omega)$
1	$\delta(t)$	1
2	$u(t)$	$\pi\delta(\omega) + \frac{1}{j\omega}$
3	1	$2\pi\delta(\omega)$
4	$\text{sgn}(t)$	$\frac{2}{j\omega}$
5	$e^{j\omega_0 t}$	$2\pi\delta(\omega - \omega_0)$
6	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)]$
7	$\sin(\omega_0 t)$	$\frac{\pi}{j}[\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)]$
8	$\text{rect}(t/\tau)$	$X(\omega) = \tau \text{sinc}\left(\frac{\omega\tau}{2}\right)$
9	$\frac{\tau}{2\pi} \text{sinc}\left(\frac{t \cdot \tau}{2}\right)$	$\text{rect}\left(\frac{\omega}{\tau}\right)$
10	$e^{-at}u(t), \text{Re}\{a\} > 0$	$\frac{1}{a + j\omega}$

În tabelul din slide sunt date transformatele Fourier pentru cele mai importante semnale neperiodice cu care operăm. De calculul majorității acestora ne vom ocupa la seminar.

Etapele urmate în realizarea analizei Fourier a unui semnal neperiodic în timp continuu

1. Stabilirea expresiei matematice a semnalului
2. Reprezentarea semnalului în domeniul timp
3. Analiza existenței eventualelor simetrii (paritate, imparitate)
4. Calculul transformatei Fourier (funcției de densitate spectrală de amplitudine):
 $X(j\omega)$
5. Calculul modulului transformatei Fourier (a densității spectrale de amplitudine):
 $|X(j\omega)| = M(\omega)$
6. Reprezentarea grafică a modulului transformatei Fourier
7. Determinarea lărgimii de bandă a semnalului
8. Calculul densității spectrale de energie a semnalului $|X(j\omega)|^2 = G(\omega)$

Iată care sunt etapele de urmat în realizarea analizei Fourier complete pentru un impuls / semnal neperiodic în timp continuu. Să le parcurgem sumar.

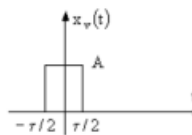
Calculul transformatei Fourier se poate face direct, folosind definiția, sau bazându-ne pe proprietățile, deja evidențiate, ale transformatei.

Analiza spectrală a impulsului video simetric – etapele 1 și 2

1. Stabilirea expresiei matematice a semnalului

$$x_v(t) = \begin{cases} A & t \in \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \text{ sau } |t| \leq \frac{\tau}{2} \\ 0 & t \notin \left[-\frac{\tau}{2}, \frac{\tau}{2}\right] \text{ sau } |t| \geq \frac{\tau}{2} \end{cases}$$

2. Reprezentarea semnalului în domeniul timp



MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

16

Expresia analitică a semnalului video simetric este de tipul celei date în slide. Reprezentarea grafică, în domeniul timp, a semnalului considerat este imediată.

Analiza spectrală a impulsului video simetric – etapele 3, 4 și 5

3. Analiza existenței eventualelor simetrii (paritate, imparitate)

Cum $x(t) = x(-t) \Rightarrow x(t)$ este pară, adică $B(\omega) = 0 \Rightarrow X(j\omega) = A(\omega)$

4. Calculul transformatei Fourier

$$X_v(j\omega) = A(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cos \omega t dt = 2A \int_0^{\frac{\tau}{2}} \cos \omega t dt = \frac{2A}{\omega} \sin \frac{\omega \tau}{2} = \tau A \operatorname{sinc} \frac{\omega \tau}{2}$$

5. Calculul modului transformatei Fourier

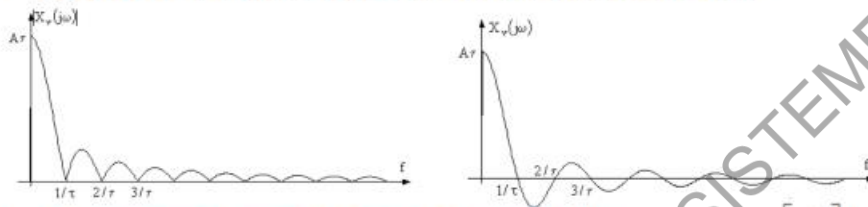
$$|X_v(j\omega)| = \left| \tau A \operatorname{sinc} \frac{\omega \tau}{2} \right|$$

Semnalul este unul par. Prin urmare trebuie calculată numai componenta pară, cea impară fiind nulă: $X(j\omega) = A(\omega)$.

Transformata Fourier, adică funcția de densitate spectrală, cum am mai denumit-o, este cea obținută în slide și exprimată cu ajutorul funcției sinus atenuat.

Analiza spectrală a impulsului video simetric – etapele 6, 7 și 8

6. Reprezentarea grafică a modului transformatei Fourier



7. Determinarea lărgimii de bandă a semnalului

$$B = \left[0, \frac{1}{\tau} \right] [\text{Hz}]$$

8. Calculul densității spectrale de energie a semnalului

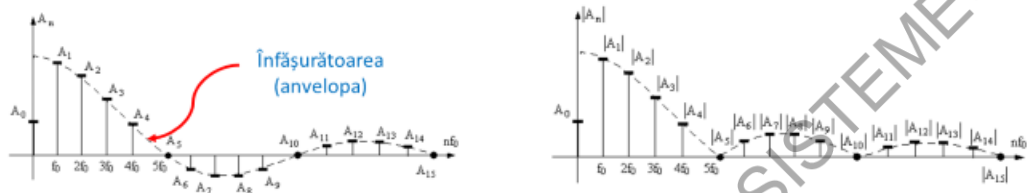
$$|X(j\omega)|^2 = \tau^2 \sin^2 \frac{\omega \tau}{2}$$

Modulul transformatei Fourier, adică a densității spectrale de amplitudine a semnalului video simetric, este cel reprezentat.

Se poate face reprezentarea funcției de densitate spectrală, fără a se considera valoarea absolută, și, în acest caz, se obține cel de-al doilea grafic.

Lărgimea de bandă a semnalului, B , se întinde de la 0 până la prima frecvență la care spectrul de amplitudini se anulează. Observăm că aceasta depinde doar de durata τ a impulsului. Cu cât durata acestuia este mai mare, cu atât banda B de frecvență este mai îngustă și amplitudinea spectrală $A\tau$ este mai mare.

Mai țineți minte cum arăta spectrul de amplitudini în cazul semnalului periodic?



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

19

Reprezentarea spectrului de amplitudini, în funcție de frecvență, pentru un caz particular considerat de noi tot pentru un semnal nesimetric, dar periodic, în cursul anterior, este cea din figură. Cu linie punctată s-a reprezentat *înfășurătoarea (anvelopa)* spectrului. Este evidentă tendința de scădere a amplitudinii odată cu creșterea frecvenței.

Convoluția în timp

Convoluția (sau produsul de convoluție) a două semnale, $x_1(t)$ și $x_2(t)$, este un semnal $x(t)$ definit prin

$$x(t) = x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - \tau) x_2(\tau) d\tau$$

Convoluția se mai notează și prin $x_1(t) \otimes x_2(t)$.

Am definit aici convoluția (sau produsul de convoluție) a două semnale în timp continuu.

Proprietățile convoluției în timp

Convoluția este o operație comutativă.

$$x_1(t) * x_2(t) = x_2(t) * x_1(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) x_2(t - \tau) d\tau$$

Convoluția este o operație asociativă.

$$x_1(t) * [x_2(t) * x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] * x_3(t)$$

Convoluția este o operație distributivă în raport cu adunarea.

$$x_1(t) * [x_2(t) + x_3(t)] = [x_1(t) * x_2(t)] + [x_1(t) * x_3(t)]$$

Rețineți că aceasta este o operație comutativă. Ea prezintă și proprietățile de asociativitate și distributivitate, în raport cu adunarea, însă comutativitatea este cea mai utilizată.

Transformata Fourier a convoluției a două semnale este produsul algebric al transformatelor lor

$$\mathcal{F}\{x_1(t) * x_2(t)\} = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t-\tau) \cdot x_2(\tau) d\tau \right] \cdot e^{-j\omega t} dt$$

Făcând schimbarea de variabilă $\theta = t - \tau$, relația de mai sus devine:

$$\mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\theta) \cdot e^{-j\omega\theta} d\theta \cdot \int_{-\infty}^{\infty} x_2(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau = X_1(\omega) \cdot X_2(\omega)$$

Aceasta este **teorema integralei de convoluție în timp**.

Să urmărim demonstrația relației evidențiate.

Pentru simplitatea redactării, am folosit pentru transformata Fourier notația $X(\omega)$, și nu $X(j\omega)$. Vom înțelege imediat de ce.

Derivare/Integrare în produsul de convoluție

$$X_1(\omega) \cdot X_2(\omega) = [j\omega X_1(\omega)] \cdot \left[\frac{X_2(\omega)}{j\omega} \right] \Rightarrow x_1(t) * x_2(t) = x_1'(t) * \left[\int_{-\infty}^t x_2(\tau) d\tau \right] = \left[\int_{-\infty}^t x_1(\tau) d\tau \right] * x_2'(t)$$

Convoluția a două semnale este egală cu convoluția dintre derivata primului și integrala celui de-al doilea, respectiv integrala primului și derivata celui de-al doilea.

Acest rezultat rezultă imediat din proprietățile transformatei Fourier privind derivarea și integrarea.

Convoluția în frecvență

$$X(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} X_1(\omega) * X_2(\omega) \stackrel{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} X_1(\lambda) X_2(\omega - \lambda) d\lambda$$

Teorema integralei de convoluție în frecvență

Transformata Fourier inversă a convoluției în frecvență a două transformate Fourier este produsul algebric al semnalelor, la care acestea corespund, ponderat cu constanta 2π .

$$F^{-1} \{ X_1(\omega) * X_2(\omega) \} = 2\pi x_1(t) x_2(t)$$

Similar cu definiția convoluției în domeniul timp, se poate defini convoluția și în domeniul frecvență. Aici înțelegem de ce nu am folosit notația $X(j\omega)$, ci $X(\omega)$. Proprietatea de comutativitate este și aici valabilă. Rezultatul cel mai important pe care trebuie să îl reținem este teorema integralei de convoluție în frecvență.

Convoluția cu impulsul Dirac - delta

Convoluția dintre un semnal oarecare $x(t)$ și impulsul Dirac-delta este egală chiar cu semnalul $x(t)$.
$$x(t) * \delta(t) = x(t)$$

Astfel, ținând cont că impulsul Dirac-delta este par, obținem:

$$x(t) * \delta(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) \delta(\tau - t) d\tau = x(t)$$

Produsul de convoluție dintre o funcție și impulsul Dirac-delta este egal cu valoarea funcției respective în punctul dat de argumentul impulsului Dirac-delta.

$$x(t) * \delta(t - t_0) = x(t - t_0) \text{ -- în domeniul timp}$$

$$X(\omega) * \delta(\omega - \omega_0) = X(\omega - \omega_0) \text{ -- în domeniul frecvență}$$

Folosind proprietatea de „sifting” evidențiată în cazul impulsului Dirac-delta, obținem imediat relațiile din slide.

Prin prima relație se demonstrează faptul că convoluția dintre un semnal oarecare $x(t)$ și impulsul Dirac-delta este egală chiar cu semnalul $x(t)$.

Această concluzie se generalizează prin relațiile următoare.

Reținem că produsul de convoluție dintre o funcție și impulsul Dirac-delta este egal cu valoarea funcției respective în punctul dat de argumentul impulsului Dirac-delta, lucru valabil atât în domeniul timp, cât și în domeniul frecvență.

Convoluția cu impulsul treaptă unitate

Convoluția dintre derivata unui semnal oarecare, $x'(t)$, și impulsul treaptă unitate, $u(t)$, este egală chiar cu semnalul $x(t)$.

$$x(t) = x'(t) * u(t)$$

$$x(t) = x(t) * u(t) = x'(t) * \underbrace{\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau}_{=u(t)} = x'(t) * u(t)$$

Prima egalitate corespunde convoluției dintre semnalul oarecare $x(t)$ și impulsul Dirac-delta $\delta(t)$, demonstrată anterior. Apoi se aplică derivarea/integrarea în convoluție. Ținând cont că integrala este chiar impulsul treaptă unitate, rezultă imediat relația de demonstrat.



MARIN BANCOȘ - SEMNALE DE SISTEME

27

Meritați aplauze, pentru răbdarea pe care ați avut-o!