

CURSUL 3

ALTE TIPURI DE SEMNALE UTILIZATE.

semnal treaptă unitate, semnal dreptunghiular, semnal rampă unitate, semnal triunghiular,

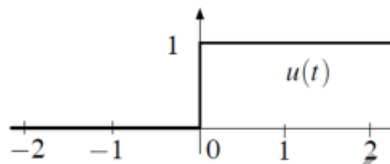
Operații de bază cu semnale.

TRANSFORMĂRI ELEMENTARE ASUPRA SEMNALELOR ÎN DOMENIUL TÎMP.
SEMNALUL IMPULS DIRAC-DELTA

În cursul precedent am discutat despre eșantionarea semnalelor definite în timp continuu (analogice), despre cuantizarea acestora, despre efectele nedorite ce însoțesc aceste procese, respectiv aliasingul și zgometul de cuantizare, și am arătat cum se realizează digitalizarea unui semnal analogic, golind astfel de semnificație fizică gradarea axelor orizontala și verticală. De asemenea, am pus în evidență semnalele sinusoidale și exponențiale, reale și complexe, făcând o recapitulare consistentă a ceea ce vom folosi în lucrul cu funcții trigonometrice și cu numere complexe. Continuăm astăzi cu următoarele subiecte.

SEMNALUL TREAPTĂ UNITATE ÎN TIMP CONTINUU

$$u(t) = \begin{cases} 1, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



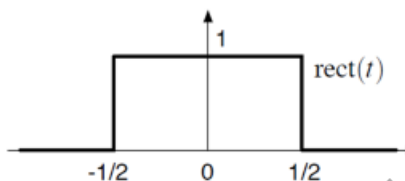
MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

2

Funcția treaptă unitate (Heaviside) este definită prin exprimarea matematică din slide și are reprezentarea grafică dată.

SEMNAL DREPTUNGHILAR UNITATE DEFINIT ÎN TIMP CONTINUU

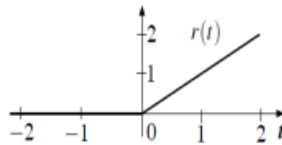
$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1, & \text{pentru } |t| \leq \frac{1}{2} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$



Un exemplu de semnal dreptunghiular este cel pe care îl definim mai sus. Valoarea 1 se referă la palierul nenul al semnalului. Putem da, însă, multe alte exemple de semnale dreptunghiulare.

SEMNAL RAMPĂ UNITATE DEFINIT ÎN TIMP CONTINUU

$$r(t) = \begin{cases} t, & t \geq 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



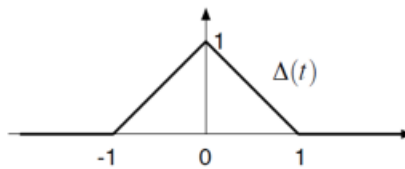
MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

4

Relația de definiție și graficul sunt date în slide. Valoarea 1 se referă la panta rampei.

SEMNAL TRIUNGHIULAR UNITATE DEFINIT ÎN TIMP CONTINUU

$$\Delta(t) = \begin{cases} 1 - |t| & \text{pt } |t| < 1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

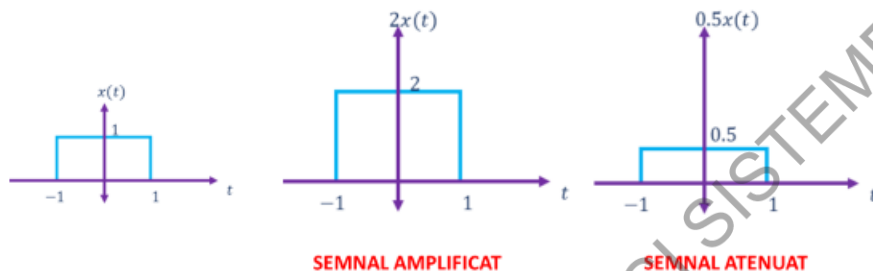


Un alt semnal interesant, definit mai sus, este semnalul triunghiular unitate. Valoarea 1 se referă la aria triunghiului.

Operații de bază cu semnale

Înmulțirea unui semnal analogic cu un scalar:

$$a \cdot x(t), a \in \mathbb{R}$$



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

6

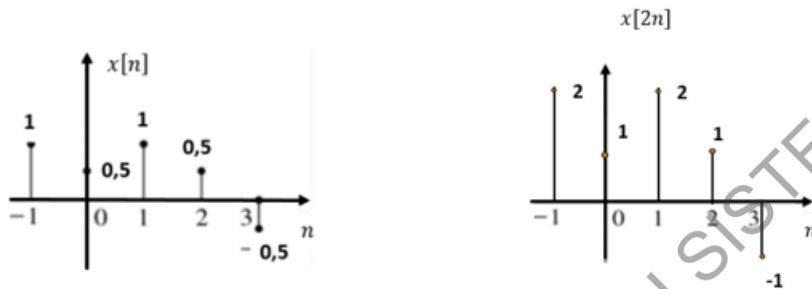
Acestea fiind spuse, trecem să discutăm despre operații de bază cu semnale care acționează strict asupra amplitudinii, semnalelor.

Prima operație de bază, pe care o utilizăm în prelucrarea semnalelor, este cea de înmulțire a semnalului cu un scalar (multiplicare cu o constantă).

Dacă valoarea constantei este una pozitivă și supraunitară, realizăm *amplificarea semnalului* (crește amplitudinea), iar dacă este pozitivă și subunitară, realizăm *atenuarea semnalului* (scade amplitudinea).

Exemplificarea am făcut-o pe cazul analogic, dar lucrurile stau similar și în cazul discret, în acest caz realizându-se înmulțirea fiecărui eșantion al semnalului considerat cu constanta (scalarul) a .

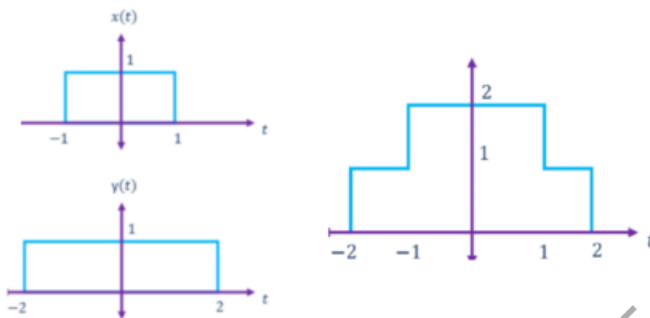
Înmulțirea unui semnal discret cu un scalar $a \cdot x[n], a \in \mathbb{R}$



Operațiunea este, pentru acest caz, echivalentul amplificării semnalului inițial cu un factor de amplificare egal cu 2.

Operații de bază cu semnale:

Adunarea semnalelor: $x(t) + y(t)$ sau $x[n] + y[n]$



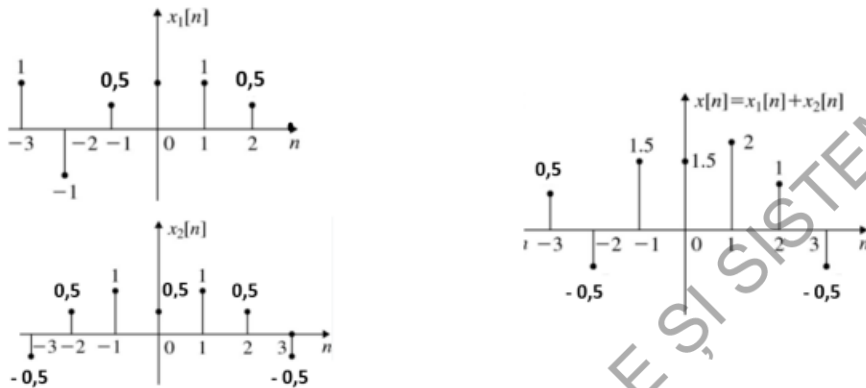
MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

8

O altă operație de bază este adunarea semnalelor. În acest caz, la orice moment t , valoarea amplitudinii semnalului rezultat este egală cu suma amplitudinilor semnalelor care se adună. Analizăm cazul adunării semnalelor analogice din slide.

În cazul semnalelor discrete, la fiecare moment n , amplitudinea eșantionului rezultat este egală cu suma valorilor eșantioanelor semnalelor care se adună. Să urmărim.

EXEMPLU: Sumă (însurare/adunare de semnale discrete)



MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

9

Operația în sine este frecvent întâlnită în practică. Gândiți-vă la suprapunerea zgomotului peste un semnal util în procesul de transmitere a acestuia pe un cablu de comunicații.

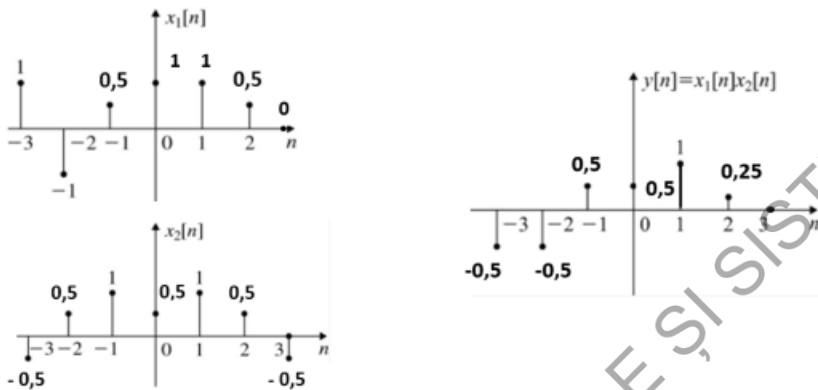
Operații de bază cu semnale: Înmulțirea $x(t) \cdot y(t)$ sau $x[n] \cdot y[n]$



Fiind date semnalele analogice din slide, să încercăm să obținem rezultatul înmulțirii (al multiplicării) acestora.

Dăm acum un exemplu și pentru cazul discret.

EXEMPLU: Produs (înmulțire de semnale discrete)

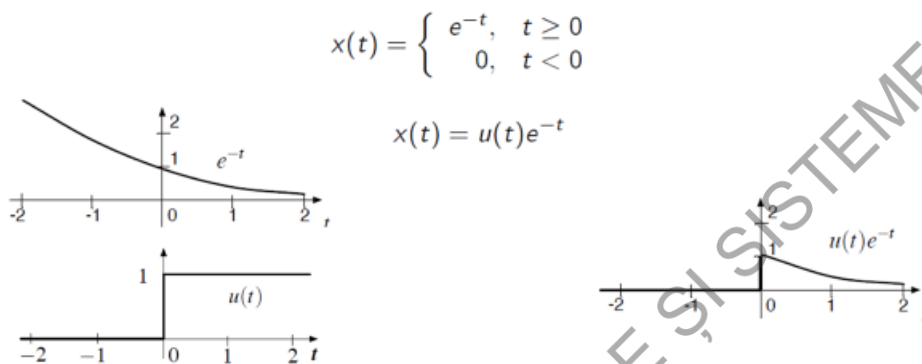


MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

11

Înmulțirea/multiplicarea a două semnale este frecvent întâlnită în condiții concrete. Veți vedea când vom dezvolta noțiunea de modulație.

EXEMPLE DE UTILIZARE A SEMNALULUI TREAPTĂ UNITATE



MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

12

Considerăm semnalul $x(t)$ definit mai sus.

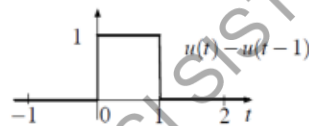
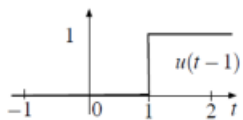
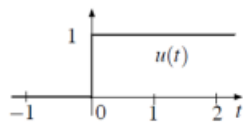
Acesta poate fi scris, cu ajutorul exponențialei reale și a funcției treaptă unitate sub forma

$$x(t) = u(t)e^{-t}.$$

Să urmărim și grafic cum arată acesta.

UN ALT EXEMPLU...

$$x(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 1 \\ 1, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$$



MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

13

Poate fi utilizat pentru crearea altor tipuri de semnale.

Să luăm exemplul semnalului dat în slide. Acesta este un semnal dreptunghiular, care se poate obține prin scriere ca

$$x(t) = u(t) - u(t - 1).$$

Să urmărim și grafic justificarea acestei exprimări.

TRANSFORMĂRI ELEMENTARE ALE SEMNALELOR ÎN DOMENIUL TIMP

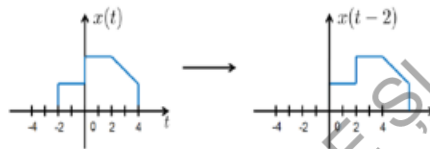
Deplasarea în timp. Exemplu.

$x(t) \rightarrow x(t - t_0), t_0 \in \mathbb{R}$ - semnal analogic

$x[n] \rightarrow x[n - n_0], n_0 \in \mathbb{Z}$ - semnal digital

$t_0 > 0$ (respectiv $n_0 > 0$) – întârziere (semnal întârziat)

$t_0 < 0$ (respectiv $n_0 < 0$) – avans (semnal avansat)



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

14

Pentru orice $t_0 \in \mathbb{R}$ și $n_0 \in \mathbb{Z}$ operația de deplasare în timp se definește prin

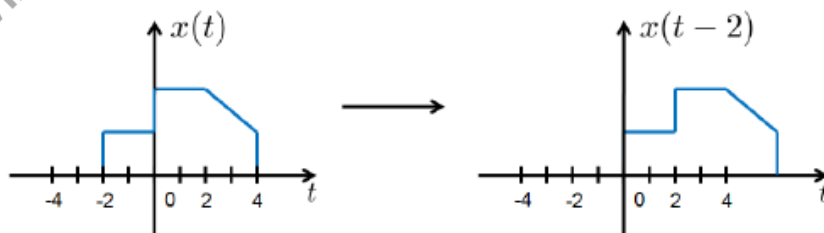
$$x(t) \rightarrow x(t - t_0)$$

$$x[n] \rightarrow x[n - n_0]$$

Dacă $t_0 > 0$, avem de a face cu o întârziere, iar dacă $t_0 < 0$, avem de a face cu un avans în timp al semnalului analogic.

Similar se întâmplă lucrurile și în cazul semnalului digital, funcție de semnul lui n_0 .

Pentru o mai bună înțelegere, vom considera exemplul semnalului $x(t)$ în timp continuu (analogic), reprezentat în figură. Semnalul întârziat $x(t-2)$ este cel figurat.



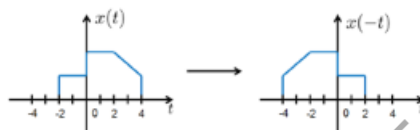
TRANSFORMĂRI ELEMENTARE ALE SEMNALELOR ÎN DOMENIUL TIMP

Inversarea timpului. Exemplu.

$x(t) \rightarrow x(-t)$, - semnal analogic

$x[n] \rightarrow x[-n]$, - semnal digital

Are ca efect *reflexia (inversiunea)* sau *oglundirea* în raport cu axa verticală.



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

15

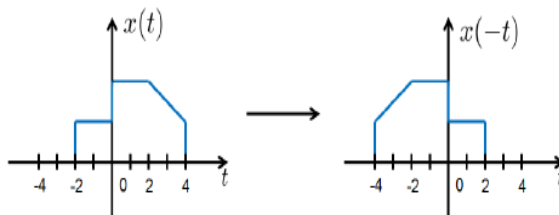
Este definită prin

$$x(t) \rightarrow x(-t)$$

$$x[n] \rightarrow x[-n]$$

și poate fi interpretată ca o *reflexie (inversiune)* sau *oglundire* a semnalului în raport cu axa verticală a sistemului de axe.

Iată ce efect are inversarea timpului în cazul semnalului considerat anterior.



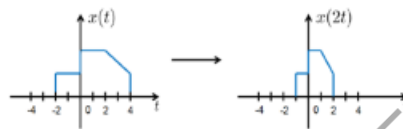
TRANSFORMĂRI ELEMENTARE ALE SEMNALELOR ÎN DOMENIUL TIMP

Scalarea timpului în cazul semnalelor analogice. Exemplu.

$$x(t) \rightarrow x(at), a > 0$$

$a > 1$ - compresia semnalului

$0 < a < 1$ - dilatarea semnalului.



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

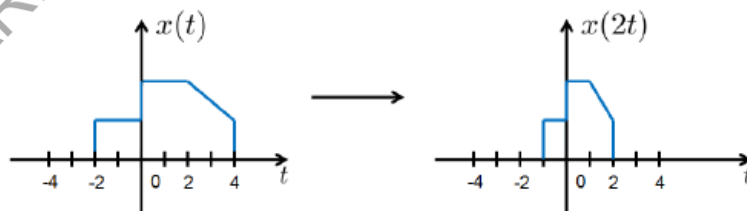
16

În cazul acestei operații, definită pentru semnale analogice (în timp continuu), variabila t este multiplicată cu o constantă pozitivă a :

$$x(t) \rightarrow x(at), a > 0$$

Pentru $a > 1$ se realizează *compresia semnalului*, iar pentru $0 < a < 1$ se realizează *dilatarea semnalului*.

Să urmărim ce se petrece în cazul exemplului considerat pentru $x(t)$.



TRANSFORMĂRI ELEMENTARE ALE SEMNALELOR ÎN DOMENIUL TIMP

Combinarea operațiilor definite.

Ne punem problema reprezentării unui semnal $y(t) = x(at - b)$, atunci când cunoaștem semnalul $x(t)$ și constantele a, b .

METODA 1: *Deplasare în timp*, după care realizăm *scalarea* (metodă recomandată):

- Reprezentăm semnalul intermediar $v(t) = x(t - b)$
- Reprezentăm semnalul $y(t) = v(at) = x(at - b)$

METODA 2: *Scalare*, după care realizăm *deplasarea în timp*:

- Reprezentăm semnalul intermediar $v(t) = x(at)$
- Reprezentăm apoi $y(t) = v\left(t - \frac{b}{a}\right) = x(at - b)$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

17

Ne punem problema reprezentării unui semnal $y(t) = x(at - b)$, atunci când cunoaștem semnalul $x(t)$ și constantele a, b .

Există două modalități prin care putem evidenția transformările la care este supus semnalul inițial.

1. *Deplasare în timp*, după care realizăm *scalarea* (metodă recomandată):

Definim și reprezentăm semnalul intermediar

$$v(t) = x(t - b)$$

Reprezentăm semnalul căutat

$$y(t) = v(at) = x(at - b)$$

2. *Scalare*, după care realizăm *deplasarea în timp*:

Definim și reprezentăm semnalul intermediar

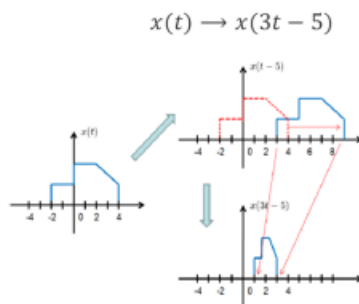
$$v(t) = x(at)$$

După aceasta reprezentăm semnalul căutat

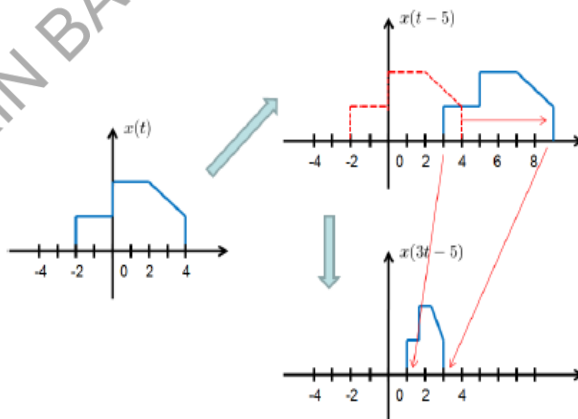
$$y(t) = v\left(t - \frac{b}{a}\right) = x(at - b)$$

EXEMPLE DE TRANSFORMĂRI ÎN CARE SE COMBINĂ OPERAȚIILE DEFINITE

EXEMPLUL 1:



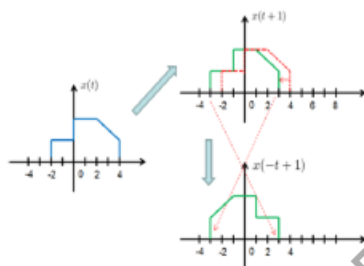
Spre exemplu, dacă dorim să obținem din $x(t)$, pentru a evidenția transformările succesive, semnalul $x(3t-5)$, vom avea, folosind prima cale, rezultatul din figură:



EXEMPLE DE TRANSFORMĂRI ÎN CARE SE COMBINĂ OPERAȚIILE DEFINITE

EXEMPLUL 2:

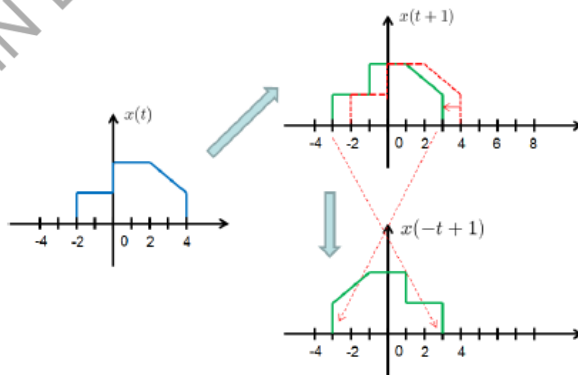
$$x(t) \rightarrow x(1-t)$$



În cazul în care succesiunea operațiilor include inversarea timpului, este preferabil să se înceapă tot cu deplasarea în timp. Să urmărim alt exemplu, în acest sens.

$$x(t) \rightarrow x(1-t)$$

Dacă dorim să-l obținem din $x(t)$ pe $x(1-t)$, adică $x(-t+1)$, se va proceda ca în figură:



TRANSFORMĂRI ELEMENTARE ALE SEMNALELOR ÎN DOMENIUL TIMP

Decimare și expandare (sau interpolare). Exemple.

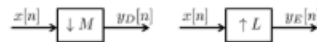
Decimarea unui semnal digital, $x[n]$, cu un factor de decimare întreg $M \in \mathbb{Z}$:

$$y_D[n] = x[Mn]$$

Expandarea unui semnal digital, $x[n]$, cu un factor de expandare (interpolare) întreg $L \in \mathbb{Z}$:

$$y_E[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{L}\right], & n = \text{număr întreg multiplu de } L \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

Reprezentare:



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

20

Aceste operații se adresează numai semnalelor digitale (în timp discret).

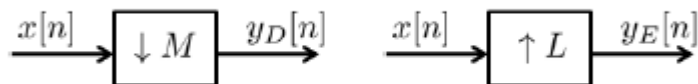
În cazul decimării unui semnal digital, $x[n]$, cu un factor de decimare întreg $M \in \mathbb{Z}$, rezultatul care se obține este semnalul digital:

$$y_D[n] = x[Mn],$$

iar în cazul expandării (interpolării), cu un factorul de expandare întreg $L \in \mathbb{Z}$, rezultatul care se obține este semnalul digital:

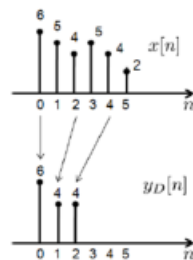
$$y_E[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{L}\right], & n = \text{număr întreg multiplu de } L \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$

O reprezentare simbolică a acestor operații efectuate asupra unui semnal digital $x[n]$ este figurată mai jos.



EXEMPLU DE DECIMARE A UNUI SEMNAL DIGITAL

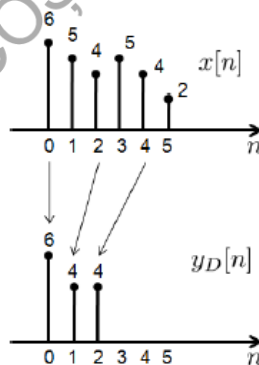
$$x[n] \rightarrow y_D[n] = x[2n]$$



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

21

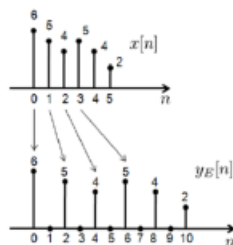
Să observăm, spre exemplu, cum se realizează decimarea unui semnal digital $x[n]$ în cazul unui factor de decimare $M=2$ (adică atunci când $y_D[n] = x[2n]$):



Au rămas, deci, numai eșantioanele care au fost de ordin par în $x[n]$. Denumirea de decimare este acum mai ușor de înțeles, având acest exemplu.

EXEMPLU DE EXPANDARE (INTERPOLARE) A UNUI SEMNAL DIGITAL

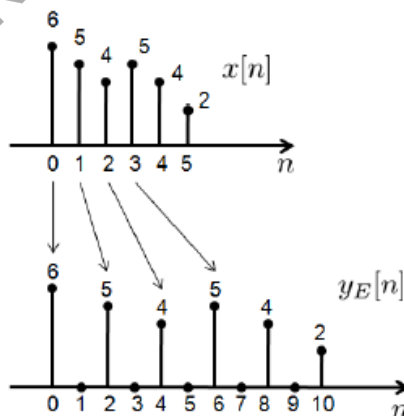
$$x[n] \rightarrow y_E[n] = \begin{cases} x\left[\frac{n}{2}\right], & n = \text{număr întreg multiplu de 2} \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$$



MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

22

Iată, însă, ce se întâmplă în cazul expandării (interpolării) semnalului digital $x[n]$, dacă se consideră un factor de expandare $L=2$ și apoi îl reprezentăm pe $y_E[n]$:



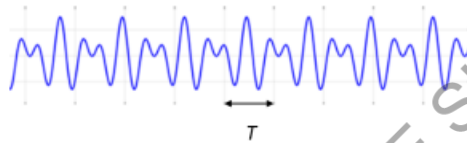
PERIODICITATE

SEMNAL ANALOGIC PERIODIC

Un semnal analogic (adică definit în timp continuu), $x(t)$, se numește *periodic*, dacă există o constantă $T > 0$ astfel încât să avem:

$$x(t) = x(t + T),$$

pentru oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$. Semnalul se numește, în acest caz, *semnal analogic periodic*.



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

23

Definiție: Un semnal analogic (adică definit în timp continuu), $x(t)$, se numește *periodic*, dacă există o constantă $T > 0$ astfel încât să avem:

$$x(t) = x(t + T),$$

pentru oricare ar fi $t \in \mathbb{R}$. Semnalul se numește, în acest caz, *semnal analogic periodic*.

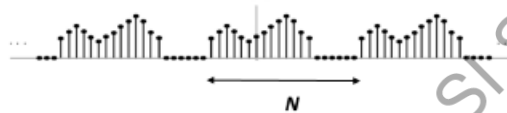
PERIODICITATE

SEMNAL DIGITAL PERIODIC

Un semnal digital (adică definit în timp discret), $x[n]$, se numește *periodic*, dacă există o constantă întreagă $N > 0$ astfel încât să avem:

$$x[n] = x[n + N],$$

pentru oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$. Semnalul se numește, în acest caz, *semnal digital periodic*.



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

24

Definiție: Un semnal digital (adică definit în timp discret), $x[n]$, se numește *periodic*, dacă există o constantă întreagă $N > 0$ astfel încât să avem:

$$x[n] = x[n + N],$$

pentru oricare ar fi $n \in \mathbb{Z}$. Semnalul se numește, în acest caz, *semnal digital periodic*.

PERIOADĂ PRINCIPALĂ A UNUI SEMNAL ANALOGIC PERIODIC

Valoarea T_0 se numește *perioadă principală a semnalului analogic periodic* $x(t)$ dacă ea este cea mai mică valoare $T > 0$ pentru care este satisfăcută condiția de periodicitate a semnalului.

Numim

$\omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ - *pulsatie (frecvență) fundamentală* a semnalului analogic periodic $x(t)$.

Reamintim condiția de periodicitate a semnalului analogic:

$$(\exists)T > 0 \text{ a. î. } x(t) = x(t + T), (\forall)t \in \mathbb{R}.$$

PERIOADĂ PRINCIPALĂ A UNUI SEMNAL DIGITAL PERIODIC

Valoarea N_0 se numește *perioadă principală a semnalului digital periodic* $x[n]$ dacă ea este cea mai mică valoare întreagă $N > 0$ pentru care este satisfăcută condiția de periodicitate a semnalului.

Numim

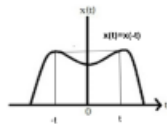
$\Omega_0 = 2\pi F_0 = \frac{2\pi}{N_0}$ - *pulsatie (frecvență) fundamentală* a semnalului digital periodic $x[n]$.

Reamintim condiția de periodicitate a semnalului discret:

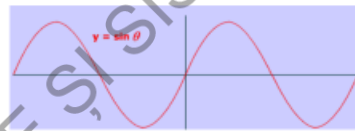
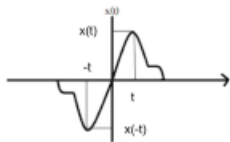
$$(\exists) N > 0 \text{ a. î. } x[n] = x[n + N], (\forall) n \in \mathbb{Z}.$$

PARITATE ȘI IMPARITATE: Semnale analogice

Dacă pentru un semnal analogic se respectă condiția: $x(-t) = x(t), (\forall)t$, spunem că avem de a face cu un *semnal analogic par*.



Dacă pentru un semnal analogic se respectă condiția: $x(-t) = -x(t), (\forall)t$, spunem că avem de a face cu un *semnal analogic impar*.

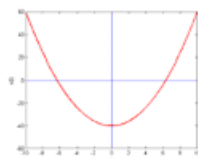


Dăm în slide definițiile semnalelor pare și impare pentru cazul analogic și exemplificăm prin reprezentări.

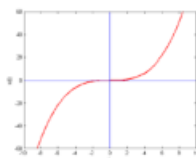
Să remarcăm simetria semnalelor pare în raport cu axa verticală, respectiv simetria semnalelor impare în raport cu originea sistemului de axe.

Cele mai utilizate funcții din aceste categorii sunt funcțiile cosinus (pară) și sinus (impară).

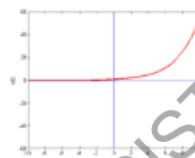
Exemple:



(a) $x(t) = t^2 - 40$



(b) $x(t) = 0.1t^3$



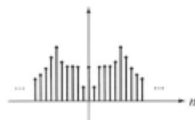
(c) $x(t) = e^{0.1t}$

Exemplificăm prin reprezentarea unor semnale analogice în cazurile:

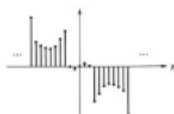
a) par, b) impar, c) nici par, nici impar.

PARITATE ȘI IMPARITATE: Semnale digitale

Dacă pentru un semnal digital se respectă condiția: $x[-n] = x[n]$, $(\forall)n$, spunem că avem de a face cu un **semnal digital par**.



Dacă pentru un semnal digital se respectă condiția: $x[-n] = -x[n]$, $(\forall)n$, spunem că avem de a face cu un **semnal digital impar**.



MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

29

Dăm în slide definițiile semnalelor pare și impare pentru cazul digital.

PARTEA PARĂ ȘI PARTEA IMPARĂ A UNUI SEMNAL ANALOGIC

Orice semnal analogic $x(t)$ poate fi scris, în mod unic, ca suma dintre un semnal analogic par $x_p(t)$ și un semnal analogic impar $x_i(t)$, date prin:

$$x_p(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2}, \quad x_i(t) = \frac{x(t) - x(-t)}{2}.$$

VERIFICARE:

$$x_p(-t) = \frac{x(-t) + x(-(-t))}{2} = \frac{x(-t) + x(t)}{2} = x_p(t) \text{ - semnal par}$$

$$x_i(-t) = \frac{x(-t) - x(-(-t))}{2} = \frac{x(-t) - x(t)}{2} = -x_i(t) \text{ - semnal impar}$$

$$x_p(t) + x_i(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} + \frac{x(t) - x(-t)}{2} = x(t)$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

30

Se verifică cu ușurință faptul că $x_p(t)$ este întradevăr un semnal par și $x_i(t)$ este un semnal impar.

$$x_p(-t) = \frac{x(-t) + x(-(-t))}{2} = \frac{x(-t) + x(t)}{2} = x_p(t)$$

$$x_i(-t) = \frac{x(-t) - x(-(-t))}{2} = \frac{x(-t) - x(t)}{2} = -x_i(t)$$

$$x_p(t) + x_i(t) = \frac{x(t) + x(-t)}{2} + \frac{x(t) - x(-t)}{2} = x(t)$$

Noțiunile nu vă sunt străine. Știți, încă din liceu, ce sunt funcțiile pare și funcțiile impare. Vă aduceți aminte că cel mai uzual exemplu de funcție pară este funcția cosinus, iar de funcție impară, funcția sinus.

PARTEA PARĂ ȘI PARTEA IMPARĂ A UNUI SEMNAL DIGITAL

Similar, orice semnal digital $x[n]$ poate fi scris, în mod unic, ca suma dintre un semnal digital par $x_p[n]$ și un semnal digital impar $x_i[n]$, date prin:

$$x_p[n] = \frac{x[n] + x[-n]}{2}, \quad x_i[n] = \frac{x[n] - x[-n]}{2}$$

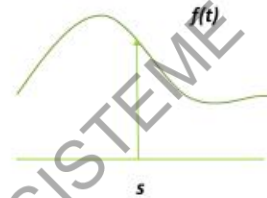
Verificările se fac identic cu cazul analogic și în cazul digital.

Semnalul impuls Dirac- delta

Trebuie să satisfacă relația:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - s) f(t) dt = f(s)$$

valabilă pentru toate funcțiile reale, de variabilă $t \in \mathbb{R}$



Vom introduce acum un instrument/artificiu matematic denumit *semnalul impuls Dirac-delta*, care nu este o funcție, ci este ceea ce numim în matematică distribuție (sau funcție generalizată).

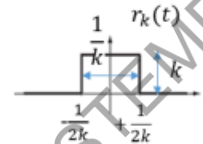
Această relație din slide definește proprietatea denumită în engleză „*sifting*” (extracție, cernere, selecție), care are exprimarea din slide. Respectiv, dacă luăm un impuls Dirac-delta pe care îl centram în s , unde s este o variabilă în $\mathbb{R}$, iar apoi îl înmulțim cu o funcție f de variabilă reală t , prin integrarea de la $-\infty$ la ∞ a acestui produs se va obține valoarea lui f în punctul s . Vă mai amintiți ce făceam în cazul eșantionării unui semnal analogic?

Grafic, dacă reprezentăm funcția generalizată delta ca o săgeată îndreptată în sus, centrată în s , și o înmulțim cu orice funcție de variabilă reală t , prin integrarea de la $-\infty$ la ∞ vom obține valoarea funcției f în s .

O FAMILIE DE SEMNALE DREPTUNGHILARE

Pentru definirea **impulsului Dirac-delta**, considerăm semnalele dreptunghiulare în timp continuu, reprezentate ca în figură, având următoarele caracteristici:

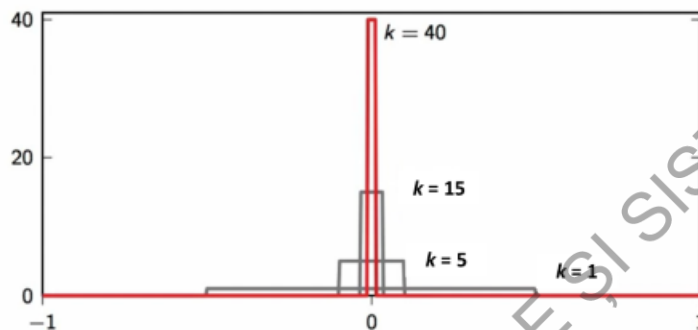
- Au amplitudinea egală cu k pe întreg intervalul suport $\left[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right]$, ce are lăţimea egală cu $\frac{1}{k}$
- Sunt de „arie” egală cu 1: $(\text{lăţime}) \times (\text{înălţime}) = \frac{1}{k} \cdot k = 1$



Pentru a înţelege proprietăţile acestei funcţii generalizate, denumită semnal impuls Dirac-delta, vom considera o familie de funcţii exact așa cum sunt ele definite în slide.

Vom demonstra imediat că această familie de funcţii, $r_k(t)$, respectă proprietatea de „sifting”, despre care am discutat mai devreme.

Reprezentarea familiei de semnale $r_k(t)$



MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

34

Reprezentăm, pentru o bună înțelegere, câteva dintre funcțiile din această familie, pentru valori arbitrare ale lui k .

Observăm rezultatele obținute pentru $k=1$.

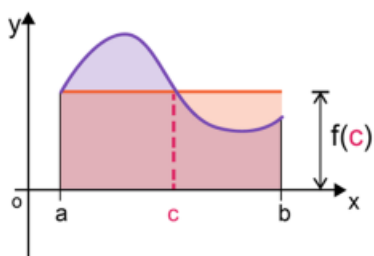
Pentru $k=5$, observați că lățimea suportului s-a micșorat la $1/5$, dar înălțimea lui a crescut la 5.

Procesul continuă, după cum observăm din reprezentările pentru $k=15$ și $k=40$, către un k infinit.

Proprietatea de „sifting” este prezentă în cazul acestor funcții de localizare $r_k(t)$. Pentru a demonstra acest lucru vă reamintesc un rezultat de care avem nevoie.

Amintiri...

Teorema valorii de medie pentru integrale definite

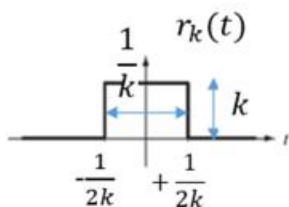


$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

În principiu, esența acestei teoreme de medie este exprimată în figură.
pSe poate face analogia cu cutia cu nisip și secțiunea prin aceasta, înainte și după nivelare.

Matematic, ceea ce este ilustrat în figură se transcrie astfel.

Folosind teorema valorii de medie,
obținem:



$$\int_{-\infty}^{\infty} r_k(t)f(t)dt = k \int_{-1/2k}^{1/2k} f(t)dt$$

$$= f(\gamma)|_{\gamma \in [-1/2k, 1/2k]}$$

și prin urmare:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} r_k(t)f(t)dt = f(0)$$

Hai să vedem dacă proprietatea de „sifting”, pe care ne dorim să o aibă funcția generalizată Dirac-delta, este prezentă în cazul funcțiilor de localizare $r_k(t)$.

Verificarea o vom face pentru $s = 0$.

Cum valoarea $r_k(t)$ este nenulă, fiind egală cu k , numai pe intervalul suport $[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}]$, integrala primește aceste limite de integrare, deoarece în rest produsul de sub integrală este 0. Constanta k iese în afara integralei, iar integralei rămase îi aplicăm *teorema valorii de medie* pentru integrale definite, reamintită anterior, care ne asigură de existența aceluiași punct γ (gamma), a cărei localizare în interval, însă, nu o cunoaștem exact.

Nici nu ne interesează, atâta timp cât pentru k tinzând la infinit intervalul tinde să devină chiar punctul 0, iar $f(\gamma)$ devine $f(0)$. Așadar, chiar s-a „cernut”, s-a „selectat”, s-a „extras” valoarea lui $f(0)$, exact cum ne așteptam, și prin urmare proprietatea de „sifting” funcționează.

Simbolul funcției generalizate Dirac-delta: $\delta(t)$

În loc să scriem:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} r_k(t-s)f(t)dt$$

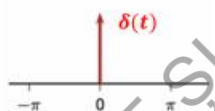
vom scrie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-s)f(t)dt.$$

ca și cum: $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(t) = \delta(t)$,

Obținem deci:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-s)f(t)dt = f(s)$$



Folosim simbolul delta ca pe o prescurtare pentru această limită care ne apare aici, scrisă de această dată pentru cazul unui s oarecare. Figurarea grafică utilizată, extrem de sugestivă, va fi cea sub formă de săgeată.

Înmulțirea unei funcții continue cu impulsul Dirac-delta, $\delta(t)$

$$x(t)\delta(t) = x(0)\delta(t)$$

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0)$$

Pentru a demonstra relația se ține cont că:

$x(t)\delta(t) = x(0)$, pentru $t = 0$, respectiv că $x(t)\delta(t) = 0$, pentru $t \neq 0$.

Similar se procedează în cazul celei de-a doua relații, care o generalizează pe prima, observând de această dată că:

$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)$, pentru $t = t_0$,

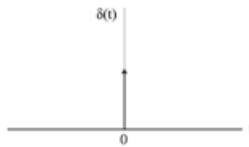
respectiv că $x(t)\delta(t - t_0) = 0$, pentru $t \neq t_0$.

Concluzii privind semnalul impuls Dirac-delta

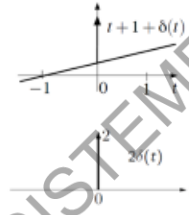
Relație de „definiție”:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty, & \text{pentru } t = 0 \\ 0, & \text{pentru } t \neq 0 \end{cases}$$

Simbol
utilizat:



unde: $\text{aria} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$



„Sifting” (cernere, selecție, extragere a eșantionului corespunzător lui t_0)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - t_0) x(t) dt = x(t_0)$$

Reținem cum se definește semnalul impuls Dirac-delta.

Convențional, reprezentarea sa este cea din figură, inclusiv la adunarea cu o funcție sau la multiplicarea cu o constantă.

Așadar acest semnal, definit în timp continuu, nu este o funcție, ci este o *funcție generalizată*, o *distribuție*.

Principala sa proprietate, care ne interesează în mod deosebit, este cea de *sifting*, demonstrată anterior.