

## CURSUL 2

DIGITALIZAREA UNUI SEMNAL ANALOGIC.

EȘANTIONARE. ALIASING. EXEMPLE.

CUANTIZARE. ZGOMOT DE CUANTIZARE. EXEMPLE.

SEMNAL ANALOGIC → SEMNAL DISCRETIZAT → SEMNAL DIGITALIZAT

PRINCIPALELE TIPURI DE SEMNALE UTILIZATE.

Semnal sinusoidal. Semnal exponențial. Variante.

---

În cursul precedent am făcut o paralelă între semnalele analogice și semnalele digitale, insistând pe avantajele aduse de operarea cu cele din urmă în tot ceea ce înseamnă memorare (stocare), procesare (prelucrare) și transport (transmisie) a informației. Iată ce ne propunem să parcurgem în cursul de astăzi.

## Digitalizarea unui semnal analogic



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

2

Semnalele analogice au o variație continuă a valorilor pe care le iau, atât în timp (de-a lungul axei orizontale), cât și în amplitudine (de-a lungul axei verticale), ceea ce conduce, în mod firesc, la necesitatea operării cu un număr infinit de valori.

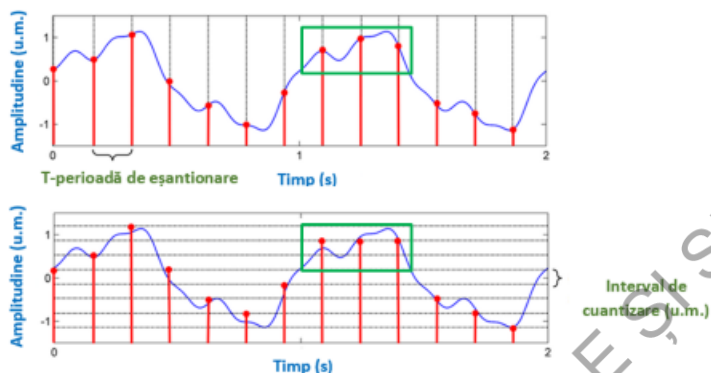
Deoarece un calculator poate stoca și procesa doar un număr finit de valori, trebuie să convertim forma de undă, reprezentată în timp continuu, într-o reprezentare în timp discret, cu valori discrete ale amplitudinii semnalului.

Numim acest proces *digitalizarea* semnalului. Atât axa orizontală, cât și axa verticală, în urma digitalizării semnalului analogic vor putea fi numerotate cu valori numere întregi.

Cea mai comună abordare, pentru digitalizarea semnalelor analogice, se realizează în doi pași, denumiți *eșantionare* și respectiv *cuantizare*.

Să considerăm, în primă fază, această ordine pașilor.

## EȘANTIONARE ȘI CUANTIZARE



### Eșantionare

Presupunem că semnalul analogic pe care dorim să-l discretizăm are forma reprezentată în figură, marcată cu culoare albastră.

Ne vom fixa o valoare de timp,  $T$ , denumită *perioadă de eșantionare*.

Prin *eșantionare* se vor reține numai acele valori ale semnalului analogic ce corespund momentelor de timp ce sunt multipli de  $T$ .

Inversul perioadei de eșantionare,  $1/T$ , este frecvența (rata) de eșantionare și o notăm cu  $F_s$ .

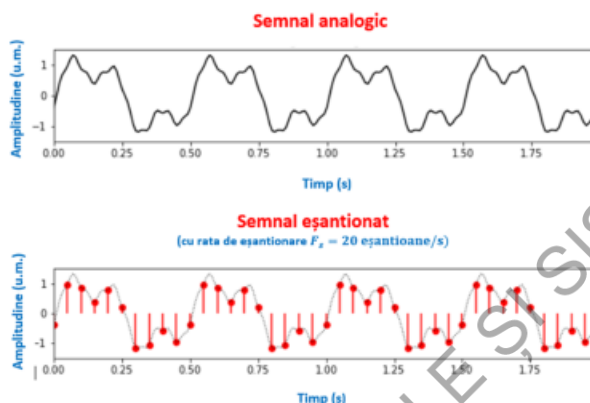
### Cuantizare

Prin *cuantizare*, axa verticală, respectiv cea corespunzătoare amplitudinii semnalului, este și ea divizată în *niveluri de cuantizare*, după ce s-a fixat un *interval de cuantizare* ce corespunde distanței dintre două astfel de niveluri. Toate amplitudinile care aparțin unui anumit interval vor primi aceeași valoare.

Observați că eșantioanele evidențiate în chenar verde, de exemplu, deși inițial aveau valori diferite, după cuantizare li se alocă același nivel.

Rezultatul care se obține prin inversarea celor două operații, de eșantionare și cuantizare, este în final același. Vom vedea puțin mai târziu acest lucru.

# SEMNAL EȘANTIONAT



**Închidere și deschidere**  
instantanee a comutatorului  
la momentele de timp:  
...  $-T, 0, T, 2T, 3T, \dots, nT, \dots$



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

4

Să analizăm ce înseamnă un semnal analogic eșantionat.

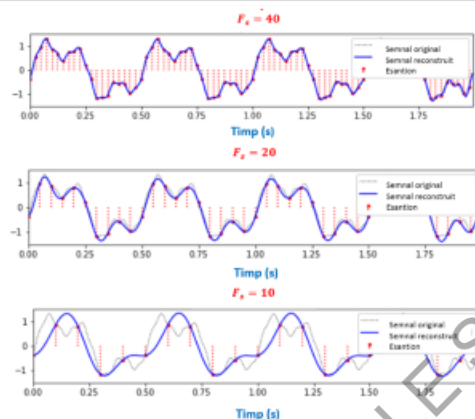
Considerând semnalul analogic din figură, la o frecvență (rată) de eșantionare de 20 Hz (adică, eșantioane pe secundă) se va obține semnalul eșantionat următor. Imaginați-vă că după fiecare perioadă  $T$  un comutator se închide și se deschide, teoretic instantaneu, lăsând astfel să treacă din semnalul analogic numai eșantionul de interes.

Numerotăm eșantioanele reținute, alocându-le numere întregi. De exemplu, în cazul nostru să le luăm doar pozitive: 0, 1, 2, ...,  $n$ , ...

Să observăm că în acest mod procesul de eșantionare permite transformarea axei orizontale, de timp continuu (corespunzătoare mulțimii  $\mathbb{R}$ ), într-o axă de timp discretă (corespunzătoare mulțimii  $\mathbb{Z}$ ).

Remarcăm diferențele importante dintre semnalul analogic inițial, a cărui formă este reprezentată în a doua figură punctat, și ceea ce rezultă prin eșantionare. Cu cât perioada de eșantionare este mai mare, cu atât aceste diferențe sunt mai mari. Să exemplificăm.

## EFECTELE VARIAȚIEI PERIOADEI DE EȘANTIONARE



MARIN BĂNCUȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

5

În general, eșantionarea este o operație cu pierderi, în sensul că se pierde informații în acest proces și că semnalul analogic original nu poate fi recuperat din versiunea eșantionată, decât dacă se îndeplinesc condițiile celebrei *teoreme a eșantionării*, pe care o vom enunța și explica mai târziu, peste mai multe cursuri.

Fără condițiile suplimentare impuse de această teoremă, privind perioada (frecvența) de eșantionare, acest proces poate provoca un efect cunoscut sub numele de *aliasing*, caz în care anumite componente de frecvență ale semnalului devin imposibil de distins. Acest efect este ilustrat în figură. Folosind o frecvență de eșantionare ridicată, semnalul original poate fi reconstruit cu o precizie ridicată.

La scăderea frecvenței de eșantionare, rămâne doar o aproximare grosieră a semnalului original.

Fenomenul de aliasing este ilustrat mai departe și prin două exemple.

# ALIASING



|                                                         |
|---------------------------------------------------------|
| <b>Audio 1</b><br>Fs = 8000<br>Număr eşantioane = 26496 |
| <b>Audio 2</b><br>Fs = 4000<br>Număr eşantioane = 13248 |
| <b>Audio 3</b><br>Fs = 2000<br>Număr eşantioane = 6624  |
| <b>Audio 4</b><br>Fs = 1000<br>Număr eşantioane = 3312  |
| <b>Audio 5</b><br>Fs = 500<br>Număr eşantioane = 1656   |
| <b>Audio 6</b><br>Fs = 250<br>Număr eşantioane = 828    |



VIDEO

MARTIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

6

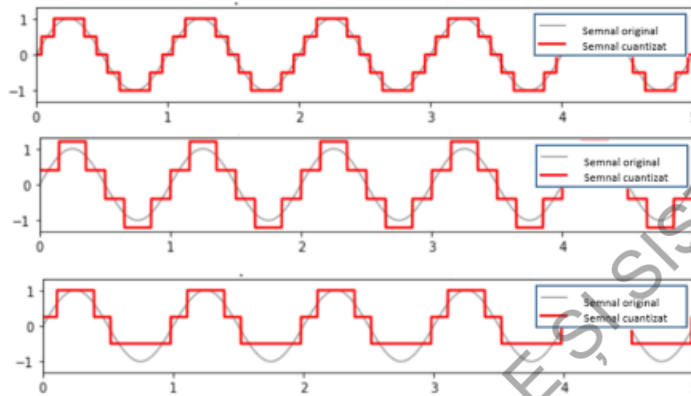
Primul exemplu indică modul în care aliasing-ul afectează calitatea sunetului. Începem cu un semnal muzical la o frecvență de eşantionare mare (valoarea inițială exactă fiind  $F_s = 8192$  Hz), frecvență care se reduce apoi, succesiv, împărțindu-se cu 2.

Efectele aliasing-ului apar și în alte cazuri, cum ar fi domeniul video.

Un exemplu celebru este efectul cunoscut sub numele de *efectul roții de căruță* (*wagon-wheel effect*), în care o roată pare să se învârtă cu o viteză mai mică decât cea reală sau chiar în sens invers, iar aceasta în condițiile în care, de fapt, viteza de rotație crește.

Observați pe fiecare dintre cercurile concentrice un număr diferit de eşantioane, de segmente colorate alternativ cu alb și negru. Aceste cercuri pot fi considerate echivalentul unor semnale vizuale eşantionate cu frecvențe diferite de eşantionare.

## SEMNAL CUANTIZAT



MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

7

Asemănător cu ceea ce am făcut în cazul eșantionării, și la cuantizare putem numera nivelurile de cuantizare stabilite, alocându-le tot numere întregi. În acest mod, procesul de cuantizare permite transformarea axei verticale, de amplitudine continuă (corespunzătoare mulțimii  $\mathbb{R}$ ), într-o axă de timp discretă (corespunzătoare mulțimii  $\mathbb{Z}$ ).

Haideți să considerăm că prima dată cuantizăm semnalul analogic inițial și fie acesta este un semnal sinusoidal. El este marcat cu culoarea gri.

În figură se observă că au fost stabilite 5 niveluri de cuantizare. Aproximarea de semnal sinusoidal este aproximativă.

Dacă se scade la 4 numărul nivelurilor de cuantizare, se obține aproximarea din figură, categoric mai modestă.

Și, în final, la 3 niveluri de cuantizare, îndepărtarea de forma semnalului analogic original este mult prea mare...

## ZGOMOT DE CUANTIZARE



|                                                                                   |                                                       |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------|
|  | Audio 1<br>16 biți<br>$2^{16}$ niveluri de cuantizare |
|  | Audio 2<br>8 biți<br>$2^8$ niveluri de cuantizare     |
|  | Audio 3<br>4 biți<br>$2^4$ niveluri de cuantizare     |
|  | Audio 4<br>2 biți<br>$2^2$ niveluri de cuantizare     |

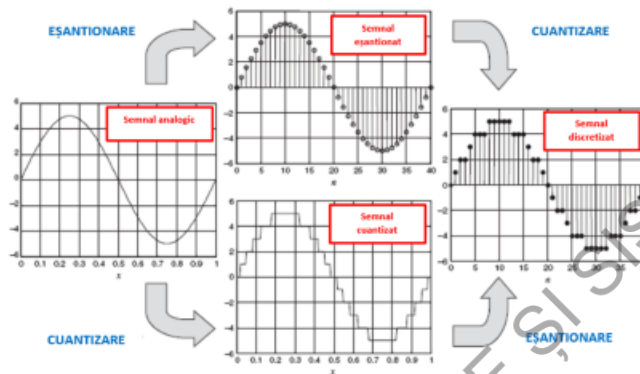
MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

8

Realizăm că, în aceste condiții, și cuantizarea este o operație cu pierderi. Distorsiunile introduse de un astfel de proces sunt denumite *zgomot de cuantizare*.

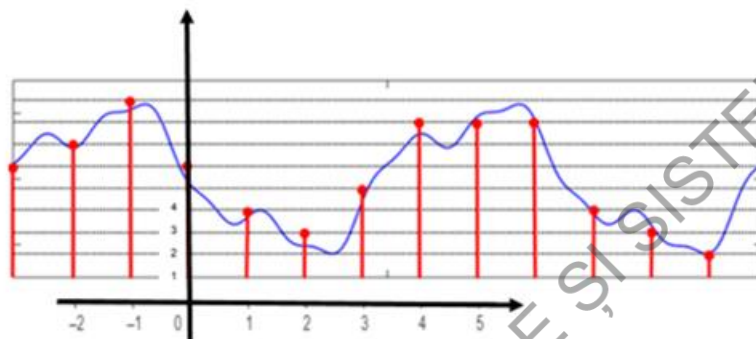
Ascultați cum se deteriorează calitatea semnalului audio odată cu scăderea numărului de niveluri de cuantizare.

## SEMNAL ANALOGIC → SEMNAL DISCRETIZAT



Indiferent care este ordinea pașilor, urmată pentru a obține semnalul discretizat, rezultatul este în final același.

## SEMNAL DISCRETIZAT → SEMNAL DIGITALIZAT



MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

10

În urma discretizării semnalului analogic am ajuns exact acolo unde ne-am propus, respectiv în situația în care atât pe axa orizontală, cât și pe axa verticală, gradarea să o putem face numai cu numere întregi. Golim astfel de semnificația fizică mărimile ce au fost inițial reprezentate pe axe. În plus, toate aceste valori întregi pot fi convertite în binar și ajungem astfel să folosim numai valori de 0 și 1. Exact ce-i place calculatorului nostru.

În acest mod semnalul analogic a fost digitalizat.

Țin să fac următoarea observație. Semnalul digital pretinde așadar, e adevărat, coordonate întregi pentru eșantioane, atât pe axa orizontală, cât și pe axa verticală. Printr-un abuz de limbaj, însă, adesea se asimilează un semnal analogic eșantionat pe care ar urma să-l supunem și operației de cuantizare, cu un semnal digital. Cu alte cuvinte, nu ne vom crampona de faptul că pe axa verticală nu avem numai valori întregi, cum avem pe axa orizontală, a timpului discret.

În continuare, chiar dacă în anumite cazuri facem trimitere și la semnal/sistem digital, prioritatea noastră de studiu o reprezintă semnalele/sistemele analogice. Un alt curs, cel de *Prelucrarea digitală a semnalelor*, le va fi integral dedicat semnalelor digitale.



## PRINCIPALELE TIPURI DE SEMNALE UTILIZATE

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

11

Vom trece în revistă principalele tipuri de semnale analogice și digitale utilizate în mod curent.

## Oscilațiile sunt prezente peste tot!



MARIN BANCOS - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

12

Vă reamintesc că semnalul este, așa cum am mai spus, descrierea unui fenomen fizic care evoluează în timp. Se afirmă adesea că oscilațiile sunt pulsul fundamental al naturii.

Vă dau doar câteva exemple în susținerea afirmației că oscilațiile sunt prezente peste tot. Pe slide sunt prezentate exemple imediate, foarte diferite, însă.

Dacă te gândești la bătăile inimii, este clar că acesta este un model periodic, care se tot repetă. Imaginați-vă electrocardiograma.

Un tren, de exemplu, are un motor care face roțile să se rotească într-o mișcare circulară.

Valurile, sunt un alt exemplu de flux și reflux periodic, care poate fi modelat de o manieră oscilatorie.

Desigur, și instrumentele muzicale generează sunete prin vibrații pe o anumită frecvență fundamentală.

Încercați să rămâneți cu imaginea diversă pe care toate aceste exemple ne-o oferă în ceea ce privește oscilațiile.

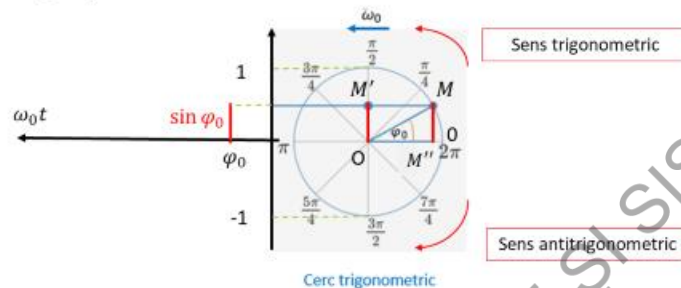
Putem afirma că orice sistem dinamic durabil prezintă un comportament oscilatoriu. Intuitiv, este destul de ușor să vezi că lucrurile care nu se mișcă „în cerc”, care nu se repetă, vor ajunge, mai devreme sau mai târziu, într-o fundătură.

O explozie este, în mod clar, un fenomen ireversibil. Este imposibil să readuci înapoi energia astfel degajată. Ne confruntăm cu ceva care se consumă foarte repede și, mai mult, este foarte perturbator.

Nu putem vorbi, însă, de oscilații, ca mișcări repetitive, fără a apela la funcții trigonometrice.

## Funcțiile trigonometrice sinus și cosinus

$$\sin \varphi_0 = \frac{\text{lungime cateta opusă}}{\text{lungime ipotenuză}} = \frac{MM''}{OM} = \frac{MM''}{1} = MM'' = OM' = \text{lungime proiecție verticală}$$



$$x(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_0) = \sin(2\pi f_0 t + \varphi_0); \quad \omega_0 = 2\pi f_0 = \frac{2\pi}{T}; \quad \sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 = 1;$$

MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

13

Vă mai amintiți cercul trigonometric? El este un cerc de rază egală cu 1, parcurs de punctul mobil M în sensul indicat pe figură, denumit *sens trigonometric* (și stabilit ca sens invers acelor de ceasornic). Sensul contrar de deplasare pe cerc se numește *sens antitrigonometric*. Observați că divizarea cercului s-a făcut în radiani, ținând cont că unei circumferințe complete îi corespund  $2\pi 1 = 2\pi$  radiani.

Punctul M se deplasează pe cerc cu *viteza (frecvența) unghiulară*  $\omega_0$ , unghiul făcut de raza mobilă (OM) cu orizontala fiind, la momentul oarecare de timp  $t$ , egal deci cu  $\omega_0 t$ . Am marcat pozițiile cele mai importante de pe cerc, exprimate în radiani.

În figură am considerat că startul să dă din poziția corespunzătoare unghiului inițial (denumit *fază inițială*) notat cu  $\varphi_0$ , iar în acest caz la momentul oarecare de timp  $t$  poziția punctului va fi furnizată de *faza* dată prin:  $\omega_0 t + \varphi_0$ .

Să urmărim pe figură ce înseamnă sinusul unghiului.

Evident, valorile sinusului aparțin intervalului  $[-1, 1]$ .

Expresia analitică a semnalului sinusoidal  $x(t)$ , de pulsație (frecvență unghiulară)  $\omega_0$  și fază inițială  $\varphi_0$ , este dată de

$$x(t) = \sin(\omega_0 t + \varphi_0).$$

Să ne aducem aminte și de frecvența propriu-zisă  $f_0$  și de relația de legătură dintre

pulsație, frecvență și perioada  $T$ .

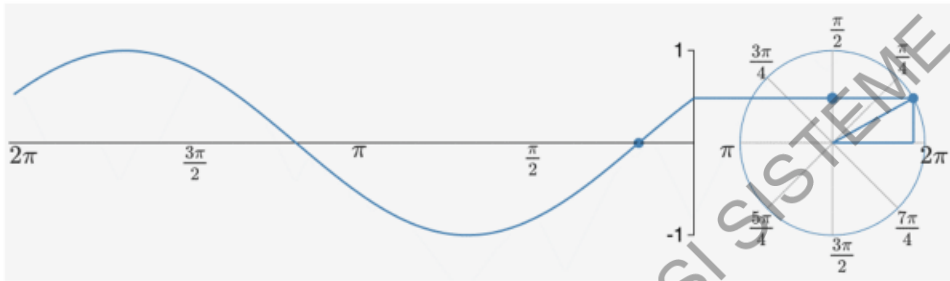
Să observăm că în cazul funcției cosinus lucrurile sunt asemănătoare, doar că valoarea cosinusului este dată de lungimea proiecției orizontale  $OM''$ .

Să observăm că formula fundamentală a trigonometriei este o consecință a aplicării teoremei lui Pitagora:

$$\sin^2 \varphi_0 + \cos^2 \varphi_0 = 1$$

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

## Forma de undă a semnalului sinusoidal



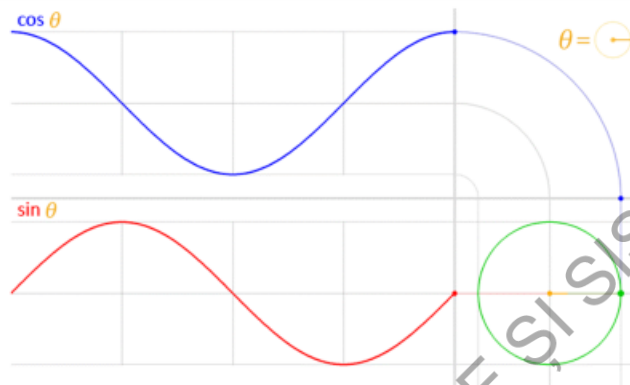
MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

14

Iată care este reprezentarea în domeniul timp a semnalului sinusoidal considerat, adică forma sa de undă.

Ce se întâmplă după parcurgerea întregului cerc? Evident că totul se repetă. Este important de remarcat faptul că cercului trigonometric întreg îi corespund  $2\pi$  radiani (sau  $360^\circ$ ), iar parcurgerea repetată a cercului înseamnă o periodicitate a formei de undă după fiecare  $2\pi$  radiani parcurși.

## Comparație între reprezentările sinusului și cosinusului



MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

15

Comparativ, iată care sunt formele de undă ale cosinusoidei (proiecția pe orizontală) și sinusoidei (proiecția pe verticală). Atât sinusul, cât și cosinusul sunt de perioadă  $2\pi$ . Să facem acum comparație între valorile celor două funcții, la momente diferite de timp. În orice moment avem verificată relația:

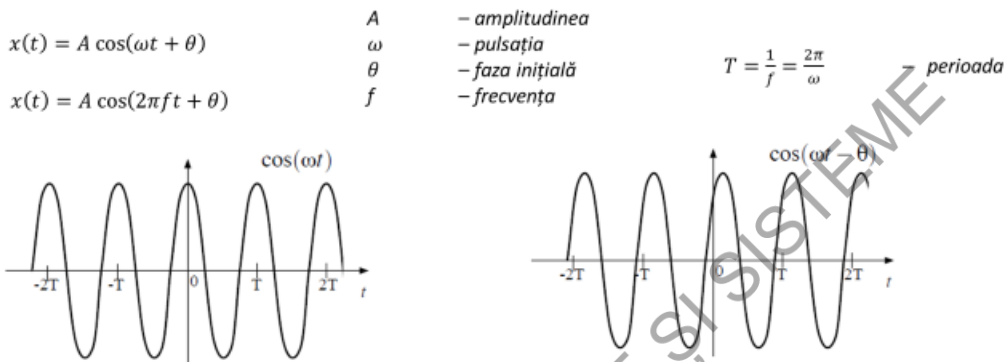
$$\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1$$

## Valori importante ale funcțiilor trigonometrice

| x    | 0° | 30°                  | 45°                  | 60°                  | 90°             | 120°                  | 135°                  | 150°                  | 180°  | 210°                  | 225°                  | 240°                  | 270°             | 300°                  | 315°                  | 330°                  | 360°   |
|------|----|----------------------|----------------------|----------------------|-----------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|--------|
| x    | 0  | $\frac{\pi}{6}$      | $\frac{\pi}{4}$      | $\frac{\pi}{3}$      | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$      | $\frac{3\pi}{4}$      | $\frac{5\pi}{6}$      | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$      | $\frac{5\pi}{4}$      | $\frac{4\pi}{3}$      | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$      | $\frac{7\pi}{4}$      | $\frac{11\pi}{6}$     | $2\pi$ |
| sinx | 0  | $\frac{1}{2}$        | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1               | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{1}{2}$         | 0     | $-\frac{1}{2}$        | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1               | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$        | 0      |
| cosx | 1  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$        | 0               | $-\frac{1}{2}$        | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | -1    | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{1}{2}$        | 0                | $\frac{1}{2}$         | $\frac{\sqrt{2}}{2}$  | $\frac{\sqrt{3}}{2}$  | 1      |
| tgx  | 0  | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1                    | $\sqrt{3}$           | -               | $-\sqrt{3}$           | -1                    | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0     | $\frac{\sqrt{3}}{3}$  | 1                     | $\sqrt{3}$            | -                | $-\sqrt{3}$           | -1                    | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0      |
| ctgx | -  | $\sqrt{3}$           | 1                    | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0               | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | -1                    | $-\sqrt{3}$           | -     | $\sqrt{3}$            | 1                     | $\frac{\sqrt{3}}{3}$  | 0                | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | -1                    | $-\sqrt{3}$           | -      |

Este important să ne reamintim valorile remarcabile ale funcțiilor trigonometrice pentru unghiuri frecvent utilizate. Veți putea utiliza acest tabel atunci când va fi nevoie. Să-l analizăm puțin.

# SEMNAL SINUSOIDAL REAL ÎN TIMP CONTINUU



Un semnal sinusoidal este de forma  $x(t) = A \cos(\omega t + \theta)$ , unde  $A$  este *amplitudinea*,  $\omega$  este *pulsația* (măsurată în radiani/s), iar  $\theta$  este *faza inițială* (măsurată în radiani).

De asemenea, se folosește și următoarea exprimare  $x(t) = A \cos(2\pi f t + \theta)$ , unde  $f$  este *frecvența* semnalului (măsurată în Hz).

Inversul frecvenței ne furnizează *perioada* semnalului sinusoidal

$$T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega}$$

măsurată în secunde (s).

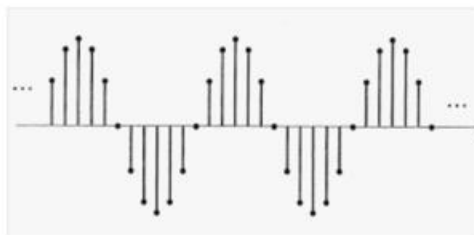
Adesea și pulsația  $\omega$  este denumită frecvență, confuzia nefiind posibilă, atâta timp cât se specifică unitatea de măsură.

La fel de bine, în locul funcției cosinus din expresia semnalului, putem avea funcția sinus.

Pentru a înțelege semnificația fazei inițiale  $\theta$ , urmăriți pe reprezentarea grafică care este diferența dintre semnalul  $\cos(\omega t)$  și semnalul  $\cos(\omega t - \theta)$ .

## SEMNAL SINUSOIDAL REAL ÎN TIMP DISCRET

$$x[n] = A \cos(\omega n + \theta)$$



În cazul reprezentării în timp discret a unui semnal sinusoidal real, expresia și forma grafică sunt de tipul celor din figură. Să nu vă imaginați că este vorba de o simplă înlocuire a variabilei  $t$  – timp continuu cu variabila  $n$  – timp discret. Apar diferențe notabile în situația aceasta. Așa cum am spus, nu insistăm pe aceste cazuri, ale semnalelor digitale, ele fiind studiate amănunțit la un alt curs.

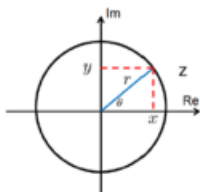
Acum, pentru a trece de la studiul semnalelor reale la studiul semnalelor complexe, trebuie să apelăm la numerele complexe.

# NUMEREELE COMPLEXE ȘI PLANUL COMPLEX

## FORMA ALGEBRICĂ:

$z = x + jy$ , unde:  $x$  – parte reală și  $y$  – parte imaginară (coordonate algebrice/carteziene)

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + jy, x, y \in \mathbb{R}, j = \sqrt{-1}\}$$



$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases} \quad \text{și} \quad \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ \theta = \tan^{-1} \frac{y}{x}. \end{cases}$$

Relația lui Euler:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

## FORMA POLARĂ:

$$z = x + jy = r \cos \theta + jr \sin \theta = r(\cos \theta + j \sin \theta) = r e^{j\theta}$$

$z = r e^{j\theta}$ , unde:  $r$  - modul și  $\theta$  - argument (coordonate polare)

MARIN BANCOS - SEMINAR DE SISTEME

19

Să ne aducem aminte de mulțimea numerelor complexe și de modul în care numerele complexe pot fi exprimate.

Un număr complex poate fi reprezentat sub *formă algebrică* (cu ajutorul coordonatelor sale algebrice/carteziene,  $x$  fiind partea reală și  $y$  partea imaginară):

$$z = x + jy$$

În aceste condiții, mulțimea numerelor complexe se scrie în modul următor. Vă reamintesc semnificația lui  $j$ .

De unde provine o astfel de reprezentare? Să ne reamintim, plasând numărul complex în planul complex.

Dacă atunci când vorbim despre un număr real ni-l imaginăm prin poziționarea sa pe o axă reală, în cazul numărului complex ni-l vom imagina prin poziționarea sa în planul complex. Axa  $Oy$  a planului complex este cunoscută sub numele de *axa imaginară*, iar axa  $Ox$  a planului complex este cunoscută ca fiind *axa reală*.

Dacă în locul coordonatelor carteziene identificăm poziția numărului complex în planul complex printr-o nouă pereche de coordonate, respectiv prin *modul* și *argument*, relațiile de legătură dintre aceste perechi de coordonate rezultă imediat. Să urmărim. Cu ajutorul

noilor coordonate, denumite *coordonate polare*, vom obține *forma polară* a numărului complex.

Această nouă formă de scriere utilizează notația pentru *exponențiala complexă*, introdusă prin *relația lui Euler*:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

Înlocuind în forma algebrică partea reală și cea imaginară cu noile expresii ale acestora și folosind relația lui Euler ajungem la scrierea sub *forma polară* a numărului complex.

$$z = x + jy = r \cos \theta + jr \sin \theta = r(\cos \theta + j \sin \theta) = r e^{j\theta}$$

Un număr complex este evident definit în mod unic printr-un punct din planul complex, prin oricare dintre cele două forme, algebrică sau polară.

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

## Relația lui Euler și scrierea funcțiilor cosinus și sinus cu ajutorul exponențialei complexe

Relația lui Euler:

$$e^{j\theta} = \cos \theta + j \sin \theta$$

$$e^{-j\theta} = \cos(-\theta) + j \sin(-\theta) = \cos \theta - j \sin \theta$$

Adunarea relațiilor → exprimarea funcției cosinus cu ajutorul exponențialei complexe:

$$e^{j\theta} + e^{-j\theta} = 2\cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

Scăderea relațiilor → exprimarea funcției sinus cu ajutorul exponențialei complexe:

$$e^{j\theta} - e^{-j\theta} = 2j \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{e^{j\theta} - e^{-j\theta}}{2j}$$

Folosind *relația lui Euler*, amintită anterior, se pot obține exprimări cu ajutorul *exponențialei complexe* pentru funcțiile trigonometrice cosinus și sinus.

Scriem această relație și pentru  $\theta$  și pentru  $(-\theta)$ .

Adunarea celor două relații, membru cu membru, ne va conduce la *exprimarea funcției cosinus cu ajutorul exponențialei complexe*.

Scăderea relațiilor, membru cu membru, ne va conduce la *exprimarea funcției sinus cu ajutorul exponențialei complexe*.

Vom folosi aceste rezultate, în cele ce urmează.

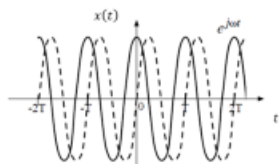
# SEMNAL SINUSOIDAL COMPLEX ÎN TIMP CONTINUU

Relația lui Euler:

$$e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$$

Semnal sinusoidal complex:

$$x(t) = A[\cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta)] = Ae^{j(\omega t + \theta)} = A \cos(\omega t + \theta) + jA \sin(\omega t + \theta)$$



$$\begin{aligned} \operatorname{Re}\{Ae^{j(\omega t + \theta)}\} &= A \cos(\omega t + \theta) \\ \operatorname{Im}\{Ae^{j(\omega t + \theta)}\} &= A \sin(\omega t + \theta) \end{aligned}$$

Reamintim relația lui Euler:  $e^{j\varphi} = \cos \varphi + j \sin \varphi$

Acest tip de semnal vine să generalizeze semnalul sinusoidal real.

Relația de definiție a acestui tip de semnal este:

$$A[\cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta)] = Ae^{j(\omega t + \theta)} = A \cos(\omega t + \theta) + jA \sin(\omega t + \theta)$$

Semnificația notațiilor utilizate este aceeași ca în cazul real.

Părțile reală și imaginară sunt:

$$\operatorname{Re}\{Ae^{j(\omega t + \theta)}\} = A \cos(\omega t + \theta) \text{ și } \operatorname{Im}\{Ae^{j(\omega t + \theta)}\} = A \sin(\omega t + \theta)$$

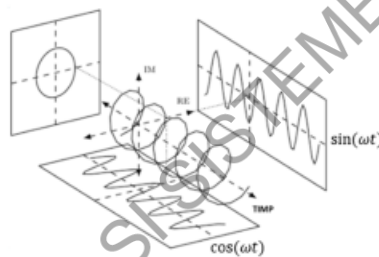
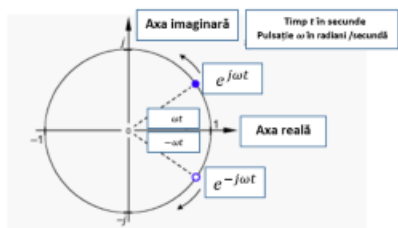
Ele reprezintă semnale sinusoidale reale în timp continuu.

În figură, partea reală este reprezentată cu linie continuă, iar cea imaginară cu linie întreruptă. S-a considerat aici cazul  $\theta = 0$ .

Nu avem, în realitate, cum să reprezentăm un semnal complex, dar vă ofer în continuare o reprezentare intuitivă a ceea ce reprezintă el.

## O REPREZENTARE INTUITIVĂ A LUI $e^{j\omega t}$

$$e^{j\omega t} = \cos(\omega t) + j \sin(\omega t)$$

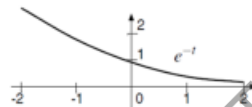


Să analizăm pe slide cum stau lucrurile.

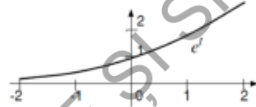
## SEMNAL EXPONENȚIAL REAL ÎN TIMP CONTINUU

Exponențiala reală:  $x(t) = e^{\sigma t}, \sigma \in \mathbb{R}$

$\sigma < 0$  - exponențială descrescătoare



$\sigma > 0$  - exponențială crescătoare



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

23

Acest semnal, denumit și, simplu, *exponențială reală*, este dat de o relație de tipul:

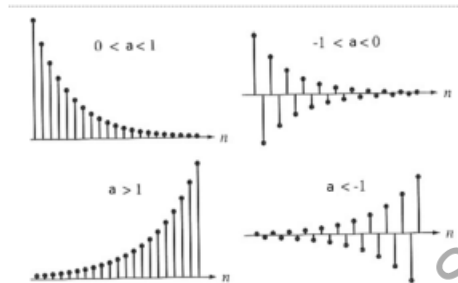
$$x(t) = e^{\sigma t}$$

Pentru  $\sigma < 0$  exponențiala este *descrescătoare*. Am reprezentat grafic cazul corespunzător lui  $\sigma = -1$ .

Pentru  $\sigma > 0$  exponențiala este *crescătoare*. Am reprezentat grafic cazul corespunzător lui  $\sigma = 1$ .

## SEMNAL EXPONENȚIAL REAL ÎN TIMP DISCRET

$$x[n] = a^n$$



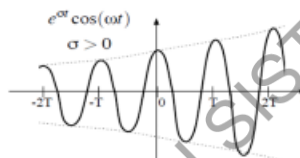
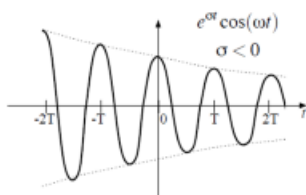
MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

24

Facem acum o reprezentare calitativă a modului în care se comportă exponențiala reală în timp discret.

## Semnal sinusoidal atenuat exponențial. Semnal sinusoidal crescător exponențial.

$$x(t) = e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta)$$



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

25

Un astfel de semnal este dat printr-o relație de tipul:

$$x(t) = e^{\sigma t} \cos(\omega t + \theta).$$

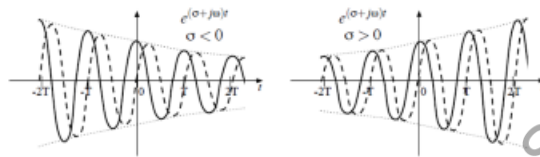
Acesta este un semnal real.

Atenuarea exponențială a sinusoidei este asigurată în cazul  $\sigma < 0$ , iar creșterea exponențială corespunde situației în care  $\sigma > 0$ .

Vom vedea mai târziu, când vom da sens termenului de modulație, că în primul caz avem o exponențială descrescătoare modulată cu semnal sinusoidal, iar în al doilea caz avem o exponențială crescătoare modulată cu semnal sinusoidal.

## SEMNALUL EXPONENȚIALĂ COMPLEXĂ ÎN TIMP CONTINUU

$$x(t) = e^{\sigma t} [\cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta)]$$



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

26

Să nu ne speriem de expresia matematică a acestui semnal. Acest tip de semnal vine să generalizeze semnalul anterior și include, practic, toate tipurile de semnale de dinainte.

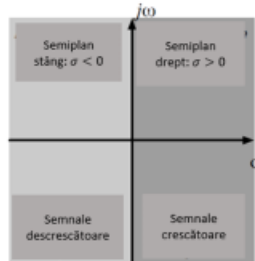
$$x(t) = e^{\sigma t} [\cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta)]$$

În figură, partea reală este reprezentată cu linie continuă, iar cea imaginară cu linie întreruptă.

## FRECVENȚA COMPLEXĂ

$$x(t) = e^{\sigma t} [\cos(\omega t + \theta) + j \sin(\omega t + \theta)] = e^{\sigma t} e^{j(\omega t + \theta)} = e^{\sigma t + j(\omega t + \theta)} = e^{(\sigma + j\omega)t + j\theta} = e^{st + j\theta},$$

unde:  $s = \sigma + j\omega$  se definește ca *frecvență (pulsatie) complexă*



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

27

Rescriem semnalul și obținem exprimarea din slide, care utilizează mărimea denumită *frecvență complexă*.

În ceea ce privește pulsația/frecvența complexă,  $s = \sigma + j\omega$ , vom opera cu aceasta în cursurile viitoare și facem precizarea că ea corespunde unui punct oarecare din planul complex. Semnificația ei este înțeleasă mai bine din reprezentarea dată.