

CURSUL 13

Decibelul și neperul – unități de măsură de nivel.

Amintiri despre logaritmi.
Scară logaritmică și scară semilogaritmică.

Ce sunt diagramele Bode? Tipuri fundamentale

Etape parcurse în reprezentarea diagramelor Bode:
caracteristici de amplificare și de fază.

Comportamentul SALIT de ordin I și II

Iată ce ne propunem astăzi să parcurgem.

Unde ne întâlnim cu oscilațiile?



MARIN BANCOS - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

Am văzut că scopul procesării semnalelor este acela de a ne dota cu instrumentele matematice necesare reprezentării unui semnal în termenii componentelor sale sinusoidale. Amintiți-vă de descompunerea semnalelor periodice în serie Fourier și de transformata Fourier a semnalelor neperiodice.

Dar de ce alegem componentele sinusoidale ca elemente de bază ale descompunerii?

Vă reamintesc că semnalul este, așa cum am mai spus, descrierea unui fenomen fizic care evoluează în timp. Se poate afirma că oscilațiile sunt pulsul fundamental al naturii.

Pe slide sunt doar câteva exemple imediate, foarte diferite, însă.

Dacă te gândești la bătăile inimii, este clar că acesta este un model periodic, care se tot repetă.

Un tren, de exemplu, are un motor care face roțile să se rotească într-o mișcare circulară.

Valurile, sunt un alt exemplu de flux și reflux periodic, care poate fi modelat de o manieră oscilatorie.

Desigur, și instrumentele muzicale generează sunete prin vibrații pe o anumită frecvență fundamentală.

Încercați să rămâneți cu imaginea diversă pe care aceste exemple ne-o oferă în ceea ce privește oscilațiile.

Putem afirma că orice sistem dinamic durabil prezintă un comportament oscilatoriu. Intuitiv, este destul de ușor să vezi că lucrurile care nu se mișcă „în cerc”, care nu se repetă, vor ajunge, mai devreme sau mai târziu, într-o fundătură. Gândiți-vă la o explozie, care este, în mod clar, un fenomen ireversibil. Este imposibil să readuci înapoi energia astfel degajată. Ne confruntăm cu ceva care se consumă foarte repede și, mai mult, este foarte perturbator. Ființele umane evoluează și ele ireversibil, din păcate, într-o singură direcție, odată cu scurgerea timpului.

Chiar și corpul tău detectează oscilații!

Cohleea – receptor de vibrații sonore sinusoidale

Pasul 1: Urechea externă

Undele sonore, adică vibrațiile, intră prin urechea externă și ajung în urechea medie pentru a produce vibrații timpanului.

Pasul 2: Urechea medie

Timpanul apoi face oscilații să vibreze, acestea fiind oase mici în urechea medie. Vibrațiile sonore călătoresc prin oscilație până în urechea internă.

Pasul 3: Urechea internă

Atunci când vibrațiile sonore ajung la cohlee, ating celulele specializate denumite celule păroase. Celulele ciliate transformă vibrațiile în impulsuri nervoase electrice.

Pasul 4: Nervul auditiv

Nervul auditiv conectează cohleea cu centrul auditiv al creierului. Atunci când impulsurile nervoase ajung la creier, acestea sunt interpretate ca sunete.



Cohleea detectează vibrații sonore (sub formă de semnale sinusoidale) cu frecvențe cuprinse între 20Hz și 20kHz.

Nivelul sonor: $q_s = 10 \log_{10} \frac{Y}{Y_0}$

Y este intensitatea sonoră

Y_0 este intensitatea sonoră de referință ($Y_0 = 10^{-16} \text{ W/cm}^2$)

MARIN BANCOS - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

Voi știți că și corpul vostru detectează oscilații? Un detector de oscilații, existent în corpul uman, este *cohleea*, din urechea internă, care detectează sinusoidale corespunzătoare undelor sonore, la frecvențe cuprinse între 20Hz și 20KHz. Aveți în figură expus, pe scurt, în patru pași, modul în care funcționează întregul mecanism.

Să știți că, într-un fel, cohleea realizează o transformare Fourier, instantanee, a undelor sonore care lovesc timpanul.

Acum, într-o altă ordine de idei, există o serie de situații în care anumite măsurători, pe care le facem, presupun furnizarea rezultatului măsurătorii prin comparație cu o valoare de referință. Altfel spus, se măsoară nivelul mărimii respective, dar nu la modul absolut, ci prin raportare la un nivel de referință. Se determină, în acest mod, raportul dintre ce avem de măsurat comparativ cu ceea ce am fixat ca referință. Într-o astfel de situație valoarea mărimii de evaluat este complet determinată dacă se cunoaște valoarea raportului și valoarea referinței.

De multe ori această raportare nu este percepută de observator în mod proporțional, în mod liniar, ci conform unei legi neliniare.

Un exemplu tipic pentru această situație este *nivelul sonor*. Datorită faptului că urechea umană are o caracteristică neliniară (mai concret spus una logaritmică, conform legii Weber-Fechner), percepția intensității sonore variază logaritmice în funcție de variația intensității sonore respective.

De aceea nivelul sonor se definește prin relația

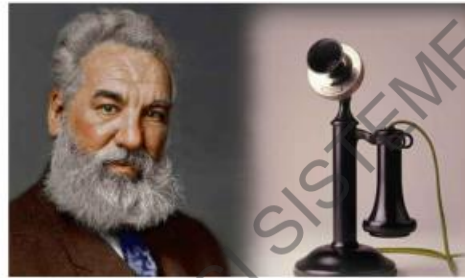
$$q_s = 10 \log_{10} \frac{Y}{Y_0}$$

unde Y este intensitatea sonoră, iar Y_0 este intensitatea sonoră de referință ($Y_0 = 10^{-16} \text{ W/cm}^2$) și corespunde pragului de audibilitate a urechii umane medii în banda de sensibilitate maximă a acesteia (1,5 – 2,5 kHz).

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

Nivelul puterii și decibelul

$$n = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} [dB]$$



Alexander Graham Bell
3 martie 1847 – 2 august 1922

MARTIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

Printr-o generalizare a acestei relații, *nivelul puterii*

$$n = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}}$$

se definește pornind de la raportul unei puteri necunoscute raportată la o putere de referință de aceeași natură. Poate fi, la fel de bine, și o altă mărime, nu neapărat putere, dar care este direct proporțională cu puterea, raportată la mărimea de referință omoloagă. Exact cum a fost cazul la nivelul sonor despre care am discutat anterior.

Acest nivel, nou definit, evidențiază dependența de natură logaritmică și se exprimă în *decibeli* (dB). Denumirea a fost dată în onoarea lui Alexander Graham Bell, inventatorul telefonului și relevă originea legată de puterea sunetului și caracteristica urechii a acestei unități de măsură.

Să observăm că datorită faptului că urechea umană medie nu discerne intensități sonore foarte apropiate, cu valori sub un prag apropiat ca valoare de 1 dB, s-a preferat această unitate în dauna belului (1B=10 dB), de unde și factorul 10 din relația de mai sus.

Decibelul – unitate de măsură de nivel

$$n = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} [dB]$$

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

$$P_{ref} = U_{ref} \cdot I_{ref} = R \cdot I_{ref}^2 = \frac{U_{ref}^2}{R}$$

$$\frac{P}{P_{ref}} = \left(\frac{I}{I_{ref}} \right)^2 = \left(\frac{U}{U_{ref}} \right)^2$$

$$n = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_{ref}} \right)^2 = 20 \log_{10} \frac{I}{I_{ref}} [dB]$$

$$n = 20 \log_{10} \frac{I}{I_{ref}} [dB]$$

$$n = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} = 10 \log_{10} \left(\frac{U}{U_{ref}} \right)^2 = 20 \log_{10} \frac{U}{U_{ref}} [dB]$$

$$n = 20 \log_{10} \frac{U}{U_{ref}} [dB]$$

MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

5

Prin generalizare, ori de câte ori este utilă compararea unor puteri, tensiuni sau curenți, conform unei scări logaritmice, se preferă evaluarea sau măsurarea acestora în raport cu o mărime de referință de aceeași natură și prezentarea acelor valori în dB.

Dacă acest lucru este valabil în orice situație în cazul puterilor, atunci, însă, când se măsoară căderea de tensiune pe o impedanță sau curentul care trece printr-o impedanță, trebuie luată precauția ca mărimea de referință să fie măsurată riguros folosind exact aceeași impedanță și nu o altă valoare.

De exemplu, în cazul evaluării puterii P disipate pe un rezistor de rezistență R și compararea acesteia cu o putere de referință P_{ref} , se obține nivelul exprimat în decibeli:

$$n = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} [dB]$$

De multe ori, însă, măsurarea căderii de tensiune la bornele rezistorului sau a curentului ce trece prin acel rezistor este mai ușor de realizat și, prin urmare, se preferă evaluarea puterii prin intermediul tensiunii sau a curentului.

Știind că

$$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$$

$$P_{ref} = U_{ref} \cdot I_{ref} = R \cdot I_{ref}^2 = \frac{U_{ref}^2}{R}$$

vom avea imediat că

$$\frac{P}{P_{ref}} = \left(\frac{I}{I_{ref}} \right)^2 = \left(\frac{U}{U_{ref}} \right)^2$$

De asemenea

$$n = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} = 10 \log_{10} \left(\frac{I}{I_{ref}} \right)^2 = 20 \log_{10} \frac{I}{I_{ref}} [dB]$$

$$n = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} = 10 \log_{10} \left(\frac{U}{U_{ref}} \right)^2 = 20 \log_{10} \frac{U}{U_{ref}} [dB]$$

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

EXEMPLU

ÎN COMUNICAȚII

Puterea de referință

$$P_{ref} = 1\text{mW}$$

Unitatea de măsură pentru nivelul puterii

dBm (decibel raportat la 1 mW)

Spunem, de exemplu, că o stație radio are nivel al puterii de emisie de 40 dBm, dacă aceasta este

$$n = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} = 40 \text{ dBm} \Rightarrow P = P_{ref} \cdot 10^{\frac{40}{10}} = 10\,000 \text{ mW} = 10 \text{ W}$$

În comunicații, atât în domeniul telefoniei, cât mai ales în radiocomunicații, s-a generalizat referirea la puterea de referință $P_{ref} = 1\text{mW}$, iar unitatea de măsură pentru nivelul puterii care se raportează la această putere de referință se notează cu dBm (și se citește „decibel raportat la 1 mW”).

Spunem, de exemplu, că o stație radio are nivel al puterii de emisie de 40 dBm dacă aceasta este

$$n = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} = 40 \text{ dBm} \Rightarrow P = P_{ref} \cdot 10^{\frac{40}{10}} = 10\,000 \text{ mW} = 10 \text{ W}$$

NEPERUL – O altă unitate de măsură de nivel

O altă unitate de măsură de nivel utilizată deseori este *neperul* (Np), de la numele lui John Naper, inventatorul logaritmului natural.

Ea se definește similar cu decibelul, utilizând, însă, logaritmul natural:

$$n = \frac{1}{2} \ln \frac{P}{P_{ref}} \quad [Np]$$
$$n = \ln \frac{U}{U_{ref}} = \ln \frac{I}{I_{ref}} \quad [Np]$$

Se poate stabili cu ușurință relația $1 \text{ Np} = 8,686 \text{ dB}$.

Amintiri despre... logaritmi

Definiția logaritmului

$$\log_a x = b \Leftrightarrow x = a^b, \quad x > 0, a > 0, a \neq 1, b \in \mathbb{R}$$

Funcția logaritmică

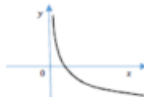
$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x, a \in \mathbb{R}, a > 0, a \neq 1$$

Reprezentare grafică

$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x, a > 1$$



$$f: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = \log_a x, 0 < a < 1$$



Proprietățile logaritmulor:

$$1) \log_a xy = \log_a x + \log_a y$$

$$2) \log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$$

$$3) \log_a x^n = n \log_a x$$

$$4) \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$5) \log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$6) \log_a 1 = 0$$

$$7) \log_a a = 1$$

$$8) \log_a a^x = x$$

$$9) \log_a \frac{1}{b} = -\log_a b$$

$$10) \log_{\frac{1}{a}} b = -\log_a b$$

După ce am reamintit, pe scurt, aceste noțiuni, vom rezolva câteva aplicații.

PROBLEMA 1

Dacă o stație radio are nivelul puterii de emisie de 50dBm, se cere să se determine puterea stației exprimată în W.

REZOLVARE:

Vom ține cont că raportarea se face la nivelul $P_{ref}=1\text{mW}$.

$$n = 10 \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} = 50 \Rightarrow \log_{10} \frac{P}{P_{ref}} = 5 \Rightarrow \frac{P}{P_{ref}} = 10^5 \Rightarrow P = 10^5 \cdot P_{ref} = 10^5 \cdot 10^{-3} = 10^2 = 100\text{W}$$

PROBLEMA 2

De câte ori trebuie mărită puterea unui semnal pentru ca nivelul de putere al acestuia să crească cu 10dB?

REZOLVARE:

$$n = 10dB = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = 1 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 10 \Rightarrow P_2 = 10P_1$$

PROBLEMA 3

Să se demonstreze că unei creșteri a nivelului de putere cu 3dB îi corespunde practic o dublare a valorii puterii.

REZOLVARE:

$$n = 3dB = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} \Rightarrow \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = \frac{3}{10} = 0,3 \Rightarrow \frac{P_2}{P_1} = 10^{0,3} \cong 1,9953 \cong 2$$

$$\Rightarrow P_2 \cong 2P_1$$

PROBLEMA 4

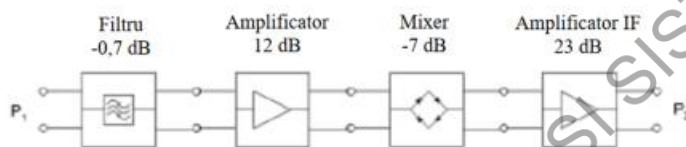
La cât trebuie să creștem o tensiune de 1V pentru a avea un câștig de 40dB în tensiune?

REZOLVARE:

$$n = 20 \log_{10} \frac{U_2}{U_1} = 40 \Rightarrow \log_{10} \frac{U_2}{U_1} = 2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = 10^2 = 100 \Rightarrow U_2 = 100U_1 = 100V$$

PROBLEMA 5

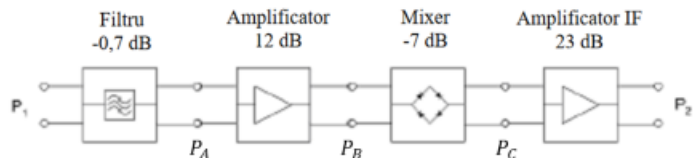
În figură sunt date valorile în dB ale nivelurilor de putere corespunzătoare părților componente ale etajului de intrare al unui receptor.
Care este nivelul total de putere al acestui etaj de intrare?



$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_A}{P_1} \cdot \frac{P_B}{P_A} \cdot \frac{P_C}{P_B} \cdot \frac{P_2}{P_C}$$

Așadar, amplificarea totală este produsul amplificărilor blocurilor conectate în cascadă.

Când amplificarea este exprimată ca nivel în decibeli, lucrurile se schimbă. În acest caz, nivelul total se obține prin adunarea nivelurilor intermediare. Să demonstrăm acest lucru.



$$n_1 = -0,7 \text{ dB} = 10 \log_{10} \frac{P_A}{P_1}$$

$$n_2 = 12 \text{ dB} = 10 \log_{10} \frac{P_B}{P_A}$$

$$n_3 = -7 \text{ dB} = 10 \log_{10} \frac{P_C}{P_B}$$

$$n_4 = 23 \text{ dB} = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_C}$$

$$\begin{aligned} n_1 + n_2 + n_3 + n_4 &= 10 \log_{10} \frac{P_A}{P_1} + 10 \log_{10} \frac{P_B}{P_A} + 10 \log_{10} \frac{P_C}{P_B} + 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_C} = \\ &= 10 \left(\log_{10} \frac{P_A}{P_1} + \log_{10} \frac{P_B}{P_A} + \log_{10} \frac{P_C}{P_B} + \log_{10} \frac{P_2}{P_C} \right) = 10 \log_{10} \left(\frac{P_A}{P_1} \cdot \frac{P_B}{P_A} \cdot \frac{P_C}{P_B} \cdot \frac{P_2}{P_C} \right) = 10 \log_{10} \frac{P_2}{P_1} = n \end{aligned}$$

Prin urmare:

$$n = n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = -0,7 + 12 - 7 + 23 = 27,3 \text{ dB}$$

Despre răspunsul în frecvență

Răspunsul în frecvență:

$$H(j\omega) \text{ (sau } H(\omega))$$

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$H(j\omega) = H_{Re}(\omega) + jH_{Im}(\omega),$$

$$H(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{g(\omega)} \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

sau:

unde am notat:

$$\bullet A(\omega) = |H(j\omega)|$$

- amplificarea

$$\bullet g(\omega) = \frac{1}{|H(j\omega)|}$$

- atenuarea

$$\bullet \varphi(\omega) = \arg\{H(j\omega)\}$$

- faza

$$\bullet \tau_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

- timpul de întârziere de grup

Proprietăți:

$$H_{Re}(\omega) = H_{Re}(-\omega); \quad H_{Im}(\omega) = -H_{Im}(-\omega);$$

$$A(\omega) = A(-\omega); \quad g(\omega) = g(-\omega);$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega); \quad \tau_g(\omega) = -\tau_g(-\omega).$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

15

Reamintim că răspunsul în frecvență al unui sistem este un număr complex, care se poate scrie cu ajutorul funcției de transfer astfel:

$$H(j\omega) = H(s) \Big|_{s=j\omega}$$

$$\text{iar: } H(j\omega) = H_{Re}(\omega) + jH_{Im}(\omega),$$

sau, în forma cea mai utilizată de noi:

$$H(j\omega) = A(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)} = \frac{1}{g(\omega)} \cdot e^{j\varphi(\omega)},$$

unde:

$$\bullet A(\omega) = |H(j\omega)|$$

- amplificarea

$$\bullet g(\omega) = \frac{1}{|H(j\omega)|}$$

- atenuarea

$$\bullet \varphi(\omega) = \arg\{H(j\omega)\}$$

- faza

$$\bullet \tau_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$$

- timpul de întârziere de grup

Proprietăți:

$$H_{Re}(\omega) = H_{Re}(-\omega); \quad H_{Im}(\omega) = -H_{Im}(-\omega);$$

$$A(\omega) = A(-\omega); \quad g(\omega) = g(-\omega);$$

$$\varphi(\omega) = -\varphi(-\omega); \quad \tau_g(\omega) = -\tau_g(-\omega).$$

Diagrama Bode

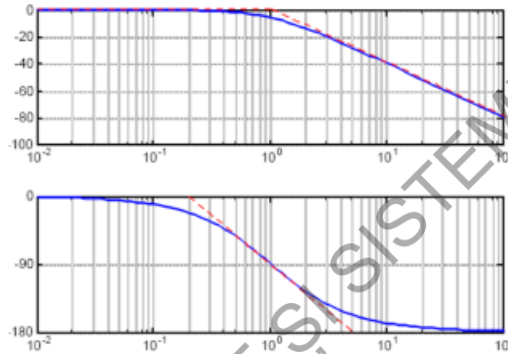
Se compune din două reprezentări:

- una corespunzătoare caracteristicii de amplificarea (amplitudine)
- cealaltă corespunzătoare caracteristicii de fază

Părintele diagramelor Bode



Hendrik Wade Bode (24 decembrie 1905 – 21 iunie 1982)



Hendrik Wade Bode (24 decembrie 1905 – 21 iunie 1982) a fost un inginer, cercetător, inventator, autor și om de știință american, de origine olandeză. Pe lângă numeroasele sale rezultate obținute în domeniul teoriei informației, alături de Claude Shannon, el a avut contribuții importante în teoria sistemelor de control și în dezvoltarea unor instrumente matematice utilizate în analiza stabilității sistemelor liniare, punând la punct cunoscutele *diagrame Bode*. Aceste diagrame sunt reprezentări simplificate, realizate cu ajutorul asimptotelor caracteristicilor de amplificare și de fază, în coordonate logaritmice, ele bazându-se pe proprietățile logaritmilor.

Scară logaritmică și scară semilogaritmică

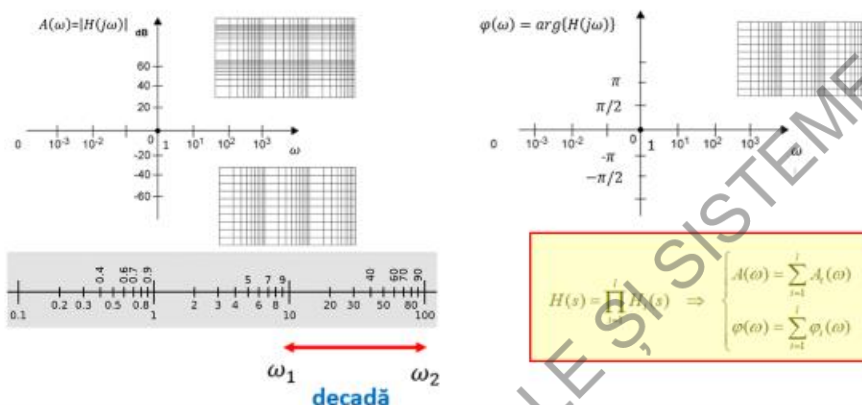


Diagrama Bode pentru un SALIT având funcția de transfer $H(s)$, constă, așa cum am spus, dintr-o caracteristică de amplificare (amplitudine) și una de fază.

Considerăm prima diagramă, cea de amplificare, unde se reprezintă $A(\omega) = |H(j\omega)|$ pe măsură ce ω variază.

Axa absciselor (axa orizontală) este una logaritmică, în timp ce modulul se exprimă, în mod curent, în decibeli, pe axa ordonatelor (axa verticală). În cele două situații grilele arată ca în figură.

Avem aici de a face cu ceea ce numim *scară logaritmică*.

În a doua diagramă, cea de fază, se reprezintă $\varphi(\omega) = \arg\{H(j\omega)\}$ pe măsură ce ω variază.

Axa absciselor (axa orizontală) este una logaritmică, iar pe axa ordonatelor (axa verticală) se reprezintă faza, în radiani sau în grade. În acest caz axa verticală este una liniară.

Avem aici de a face cu ceea ce numim *scară semilogaritmică*.

Să observăm că, în ambele diagrame, marcajul pentru abscisă corespunde logaritmului zecimal al valorii exprimate.

Pe axa absciselor, intersecția axelor corespunde valorii 1, în timp ce 0 corespunde limitei din stânga (deoarece logaritmul este definit numai pentru valori pozitive).

Să observăm că frecvențele de pe axa orizontală nu sunt scalate liniar și nu sunt egal distanțate.

Numim *decadă* un raport egal cu 10 dintre două frecvențe ω_2/ω_1 .

De asemenea, numim *octavă* un raport ω_2/ω_1 egal cu 2.

Scara logaritmică reprezintă, aşadar, o modalitate de a reprezenta date numerice dintr-o gamă foarte largă de valori într-un mod compact. De obicei, cele mai mari valori sunt de sute sau chiar de mii de ori mai mari decât cele mai mici. Observaţi că pe o astfel de scară, neliniară, nu numerele 1, 10, 20, 30, ... sunt la aceeaşi distanţă, ci numerele 1, 10, 100, 1000, ...

Care sunt avantajele utilizării scării logaritmice sau semilogaritmice?

Răspunsul este simplu, acesta fiind dat de relaţia următoare din slide. Să o interpretăm.

Intuim că este necesar să scriem $H(s)$ ca produs de funcţii elementare, deoarece prin logaritmare produsul se transformă în sumă şi, deci, amplificarea totală va fi suma amplificărilor fiecărui termen al produsului.

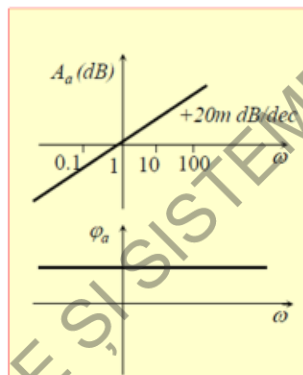
Apoi, se reprezintă, pe acelaşi grafic, diagramele Bode pentru fiecare dintre termenii funcţiei $H(s)$.

În final se însumează (grafic) diagramele trasate.

MARIN BANCOŞ - SEMNALE ŞI SISTEME

a) Zero în origine cu ordin de multiplicitate m

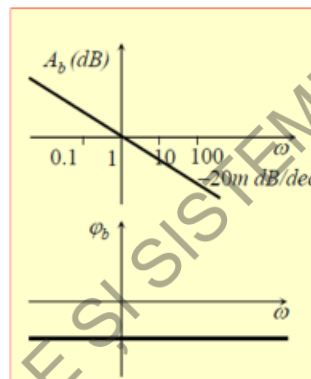
$$H_a(s) = s^m, \quad m \in \mathbb{N} - \{0\}$$
$$H_a(j\omega) = (j\omega)^m \Leftrightarrow \begin{cases} A_a(\omega) = 20m \cdot \log(\omega) \\ \varphi_a(\omega) = m \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



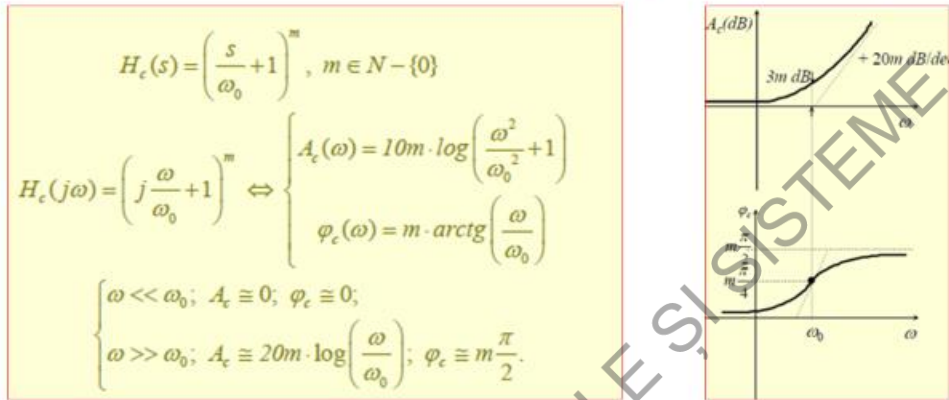
În scrierea lui $H(s)$ ca produs de funcții elementare putem avea următoarele situații.

b) Pol în origine cu ordin de multiplicitate m

$$H_b(s) = \frac{1}{s^m}, \quad m \in \mathbb{N} - \{0\}$$
$$H_b(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^m} \Leftrightarrow \begin{cases} A_b(\omega) = -20m \cdot \log(\omega) \\ \varphi_b(\omega) = -m \frac{\pi}{2} \end{cases}$$



c) Zero real cu ordin de multiplicitate m



d) Pol real cu ordin de multiplicitate m

$$H_d(s) = \frac{1}{\left(\frac{s}{\omega_0} + 1\right)^m}, \quad m \in \mathbb{N} - \{0\}$$

$$H_d(j\omega) = \frac{1}{\left(j\frac{\omega}{\omega_0} + 1\right)^m} \Leftrightarrow \begin{cases} A_d(\omega) = -10m \cdot \log\left(\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1\right) \\ \varphi_d(\omega) = -m \cdot \arctg\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega \ll \omega_0; A_d \approx 0; \varphi_d \approx 0; \\ \omega \gg \omega_0; A_d \approx -20m \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right); \varphi_d \approx -m \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$



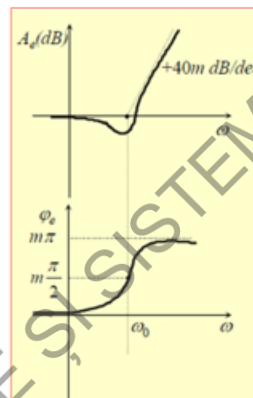
e) Zero complex cu ordin de multiplicitate m

$$H_z(s) = \left[\left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 + a \frac{s}{\omega_0} + 1 \right]^m, \quad |a| < 2, \quad m \in \mathbb{N} - \{0\}; \quad z_{1,2} = \omega_0 \cdot \left(-\frac{a}{2} \pm j \frac{\sqrt{4-a^2}}{2} \right); \quad |z_1| = |z_2| = \omega_0$$

$$H_z(j\omega) = \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + ja \frac{\omega}{\omega_0} \right)^m \Leftrightarrow \begin{cases} A_z(\omega) = 10m \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + a^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right] \\ \varphi_z(\omega) = m \cdot \arctg \left(\frac{a \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega \ll \omega_0: A_z \approx 0; \varphi_z \approx 0; \\ \omega \gg \omega_0: A_z \approx +40m \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right); \varphi_z \approx m\pi; \\ \omega = \omega_0: \varphi_z = m \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

eroarea maxima: $\begin{cases} 0 < |a| < \sqrt{2}, A_z(\omega_0) = 10m \log \left[\frac{a^2(4-a^2)}{4} \right], \omega_0 = \omega_0 \sqrt{\frac{2-a^2}{2}}; \\ \sqrt{2} < |a| < 2, A_z(\omega_0) = 3m, \omega_0 = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}} + \sqrt{1 - \frac{a^2}{2}} + 1. \end{cases}$



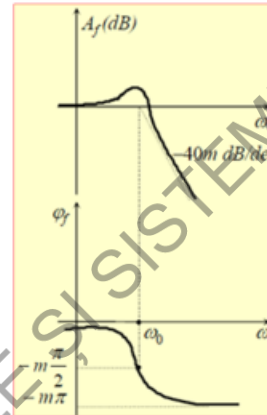
f) Pol complex cu ordin de multiplicitate m

$$H_f(s) = \frac{1}{\left[\left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 + \alpha \frac{s}{\omega_0} + 1 \right]^m}, \quad |\alpha| < 2, \quad m \in \mathbb{N} - \{0\}; \quad p_{1,2} = \omega_0 \left(-\frac{\alpha}{2} \pm j \frac{\sqrt{4-\alpha^2}}{2} \right); \quad |p_1| = |p_2| = \omega_0$$

$$H_f(j\omega) = \frac{1}{\left[1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j\alpha \frac{\omega}{\omega_0} \right]^m} \Leftrightarrow \begin{cases} A_f(\omega) = -10m \log \left[\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right)^2 + \alpha^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} \right] \\ \varphi_f(\omega) = -m \arctg \left(\frac{\alpha \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}} \right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \omega \ll \omega_0; \quad A_f \approx 0; \quad \varphi_f \approx 0; \\ \omega \gg \omega_0; \quad A_f \approx -10m \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right); \quad \varphi_f \approx -m\pi; \\ \omega = \omega_0; \quad \varphi_f = -m \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

$$\text{eroare maximă: } \begin{cases} 0 < \alpha < \sqrt{2}, \quad A_f(\omega_f) = -10m \log \left[\frac{\alpha^2 (4 - \alpha^2)}{4} \right], \quad \omega_f = \omega_0 \sqrt{\frac{2 - \alpha^2}{2}}, \\ \sqrt{2} < \alpha < 2, \quad A_f(\omega_f) = -3m, \quad \omega_f = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{\alpha^2}{2} + \sqrt{\left(1 - \frac{\alpha^2}{2} \right)^2 + 1}} \end{cases}$$

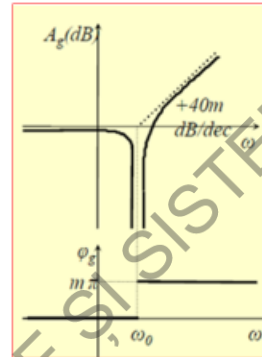


g) Zero imaginar cu ordin de multiplicitate m

$$H_z(s) = \left[\left(\frac{s}{\omega_0} \right)^2 + 1 \right]^m, \quad m \in \mathbb{N} - \{0\}$$

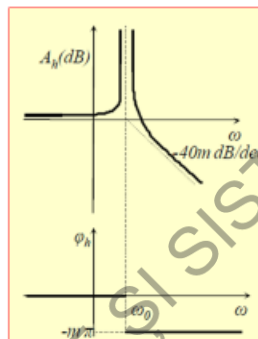
$$H_z(j\omega) = \left(-\frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 1 \right)^m$$

$$\begin{cases} \omega \ll \omega_0; A_z \cong 0; \varphi_z \cong 0; \\ \omega \gg \omega_0; A_z \cong 40m \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right); \varphi_z \cong m\pi \end{cases}$$



h) Pol imaginar cu ordin de multiplicitate m

$$H_h(s) = \frac{1}{\left[\left(\frac{s}{\omega_0}\right)^2 + 1\right]^m}, \quad m \in \mathbb{N} - \{0\}$$
$$H_h(j\omega) = \frac{1}{\left[-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + 1\right]^m}$$
$$\begin{cases} \omega \ll \omega_0; A_h \cong 0; \varphi_h \cong 0 \\ \omega \gg \omega_0; A_h \cong -40m \cdot \log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right); \varphi_h \cong -m\pi \end{cases}$$



Reprezentarea caracteristicii de amplificare

1. Se factorizează numărătorul și numitorul funcției de transfer (funcției de sistem), $H(s)$, în termeni liniari (de grad unu). Această operație presupune determinarea polilor și zerourilor funcției.

2. Se atașează fiecărui punct critic (pol sau zero) câte o frecvență de valoare egală cu modulul său. Frecvențele astfel obținute se ordonează în ordine crescătoare și se dispun pe axa absciselor.

3. Dacă originea nu este punct critic, se evaluează

$$A_0 = 20 \log(|H(0)|) \text{ (dB)}$$

și se trasează o linie orizontală la înălțimea A_0 până în dreptul primei frecvențe de interes.

Dacă originea este punct critic, se evaluează

$$A_M = 20 \log(|H(j\omega_M)|),$$

unde ω_M este o frecvență mult mai mică decât cel mai mic modul al punctelor critice. Se desenează punctul (ω_M, A_M) .

Dacă originea este zero (pol), cu ordin de multiplicitate m , se trasează o dreaptă de pantă $+20m \text{ dB/dec}$ (respectiv $-20m \text{ dB/dec}$) până în dreptul următorului punct critic, diferit de origine.

4. Din dreptul frecvenței primului punct critic diferit de origine se continuă linia poligonală. Se modifică panta din pasul anterior prin însumare cu panta suplimentară indicată în tabelul alăturat.

5. Se continuă linia poligonală înspre dreapta desenului pînă la frecvența corespunzătoare următorului punct critic. Panta liniei este egală cu suma dintre panta anterioară și panta m suplimentară introdusă de punctul critic curent. Se repetă această procedură până la epuizarea tuturor frecvențelor corespunzătoare punctelor critice. Rezultatul final este o linie poligonală neîntreruptă, cu mai multe puncte de frângere. Linile poligonale sunt asimptotele.

6. Caracteristica amplificării este trasată urmărind asimptotele. În dreptul punctelor de frângere, corespunzând unor puncte critice reale, caracteristica se va rotunji cu $3m \text{ dB}$ deasupra sau dedesubtul liniei poligonale, m fiind ordinul de multiplicitate al polului sau zeroului considerat. În cazul polilor și zerourilor complecși eroarea maximă și frecvența la care ea apare trebuie calculată. Pentru punctele critice pur imaginare amplificarea tinde la $\pm\infty$ în punctele de frângere.

Punctul critic curent	Panta suplimentară (dB/dec)
Zero real cu grad de multiplicitate m	$+20 \cdot m$
Pol real cu grad de multiplicitate m	$-20 \cdot m$
Pereche de zerouri complexe sau imaginare, cu grad de multiplicitate m	$+40 \cdot m$
Pereche de poli complecși sau imaginari, cu grad de multiplicitate m	$-40 \cdot m$

Reprezentarea caracteristicii de fază

1. Se factorizează numărătorul și numitorul funcției de transfer (funcției de sistem), $H(s)$, în termeni liniari (de grad unu). Această operație presupune determinarea polilor și zerourilor funcției.
2. Se atașează fiecărui punct critic (pol sau zero) câte o frecvență de valoare egală cu modulul său. Frecvențele astfel obținute se ordonează în ordine crescătoare și se dispun pe axa absciselor.
3. Se desenează separat faza fiecărui termen al numitorului și al numărătorului. Asimptotele sunt linii orizontale la 0 și $\pm m\pi/2$ (+ pentru zero și - pentru pol) și linii înclinate cu panta în jur de $\pm 0.36\pi/\text{dec}$ ($660/\text{dec}$).

Pentru polii și zerourile complexe, caracteristica trebuie trasată prin desenarea mai multor puncte în vecinătatea frecvenței corespunzătoare punctului critic considerat.

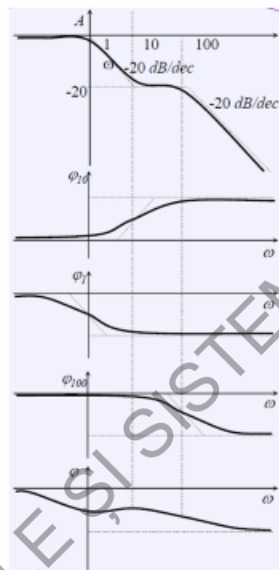
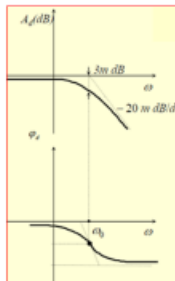
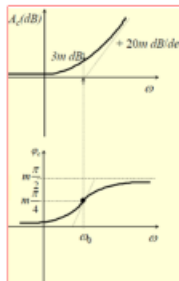
Pentru zerourile (polii) din origine ($s=0$), cu ordin de multiplicitate m , se desenează o linie orizontală la $+m\pi/2$ ($-m\pi/2$).

4. Se trasează caracteristica globală prin însumarea tuturor desenelor pentru fiecare fază în parte. Curba se rotunjește ori de câte ori asimptotele se intersectează.

Observație: A nu se uita reducerea fazei la intervalul $[-\pi, \pi]$.

APLICAȚIE

$$H(s) = \frac{10s + 100}{s^2 + 101s + 100} = \frac{10(s + 10)}{(s + 1)(s + 100)}$$





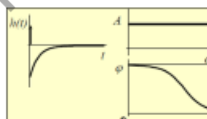
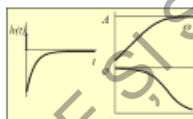
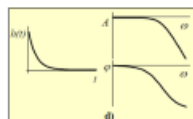
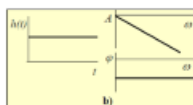
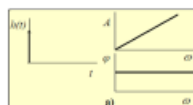
Există aplicații dedicate care pot fi utilizate pentru ridicarea caracteristicilor de amplitudine și fază.

Comportamentul SALIT de ordin I

$$a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + b_0 \cdot x(t), \quad a_1 \cdot b_0 - a_0 \cdot b_1 \neq 0$$

$$H(s) = \frac{b_1 s + b_0}{a_1 s + a_0}$$

$H(s)$	Tipul sistemului	$h(t)$
$\frac{b_1}{a_1} \cdot s$	Derivator	$\frac{b_1}{a_1} \cdot \delta(t)$
$\frac{b_0}{a_1} \cdot s$	Integrator	$\frac{b_0}{a_1} \cdot u(t)$
$\frac{b_1 \cdot s + b_0}{a_1}$	Derivator cu pierderi	$\frac{b_1}{a_1} \cdot \delta(t) + \frac{b_0}{a_1} \cdot \delta'(t)$
$\frac{b_0}{a_1 \cdot s + a_0}$	Filtru trece-jos, integrator cu pierderi	$\frac{b_0}{a_1} \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \cdot u(t)$
$\frac{b_1 \cdot s}{a_1 \cdot s + a_0}$	Filtru trece-sus	$\frac{b_1}{a_1} \cdot \delta(t) - \frac{b_1 \cdot a_0}{a_1^2} \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \cdot u(t)$
$\frac{b_1 \cdot s - \frac{b_1 \cdot a_0}{a_1}}{a_1 \cdot s + a_0}$	Filtru trece-tot	$\frac{b_1}{a_1} \cdot \left[\delta(t) - 2 \frac{a_0}{a_1} \cdot e^{-\frac{a_0}{a_1} t} \cdot u(t) \right]$



Comportamentul SALIT de ordin II

$$a_2 \cdot \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_1 \cdot \frac{dy(t)}{dt} + a_0 \cdot y(t) = b_2 \cdot \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + b_1 \cdot \frac{dx(t)}{dt} + b_0 \cdot x(t)$$
$$H(s) = \frac{b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{a_2 \cdot s^2 + a_1 \cdot s + a_0} = \frac{1}{a_2} \cdot \left[\frac{b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{s^2 + (\omega_n / Q) \cdot s + \omega_n^2} \right] = \frac{1}{a_2} \cdot \left[\frac{b_2 \cdot s^2 + b_1 \cdot s + b_0}{s^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2} \right]$$

ω_n = frecvența naturală;

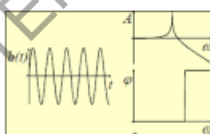
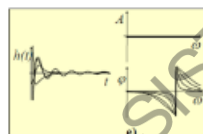
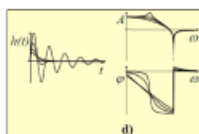
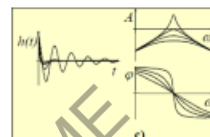
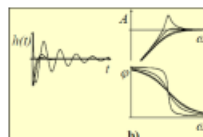
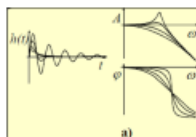
Q = factor de calitate;

ζ = factor de amortizare

$$\frac{a_1}{a_2} = 2\omega_n \zeta = \frac{\omega_n}{Q}$$

$$\frac{a_0}{a_2} = \omega_n^2$$

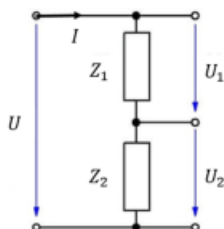
$H(s)$	Tipul sistemului	$h(t)$
$\frac{b_0}{a_0} \frac{1}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	Filtru trece-jos	$h_p(t) = \begin{cases} \frac{b_0}{a_0} \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \sin(\omega_n t) & \zeta < 1 \\ \frac{b_0}{a_0} t e^{-\zeta\omega_n t} & \zeta = 1 \\ \frac{b_0}{a_0} \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \cos(\omega_n t) & \zeta > 1 \end{cases}$
$\frac{b_0}{a_0} \frac{s^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	Filtru trece-sus	$h_p(t) = \begin{cases} \frac{b_0}{a_0} \left[\frac{\omega_n^2}{\omega_d^2} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) + \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_d^2} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t) \right] \sin(\omega_n t) & \zeta < 1 \\ \frac{b_0}{a_0} \left[\frac{\omega_n^2}{\omega_d^2} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) + \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_d^2} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t) \right] \sin(\omega_n t) & \zeta = 1 \\ \frac{b_0}{a_0} \left[\frac{\omega_n^2}{\omega_d^2} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) + \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_d^2} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t) \right] \sin(\omega_n t) & \zeta > 1 \end{cases}$
$\frac{b_0}{a_0} \frac{s}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	Filtru trece-banda	$h_p(t) = \begin{cases} \frac{b_0}{a_0} \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \cos(\omega_n t) & \zeta < 1 \\ \frac{b_0}{a_0} t e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_n t) & \zeta = 1 \\ \frac{b_0}{a_0} \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \cos(\omega_n t) & \zeta > 1 \end{cases}$
$\frac{b_0}{a_0} \frac{s^2 + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	Filtru opoarte-banda	$h_p(t) = h_p(t) + \frac{b_0 \omega_n^2}{a_0} h_p(t)$
$\frac{b_0}{a_0} \frac{s^2 - 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$	Filtru necrit	$h_p(t) = \begin{cases} \frac{b_0}{a_0} \left[\frac{\omega_n^2}{\omega_d^2} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) + \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_d^2} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t) \right] \sin(\omega_n t) & \zeta < 1 \\ \frac{b_0}{a_0} \left[\frac{\omega_n^2}{\omega_d^2} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) + \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_d^2} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t) \right] \sin(\omega_n t) & \zeta = 1 \\ \frac{b_0}{a_0} \left[\frac{\omega_n^2}{\omega_d^2} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_d t) + \frac{2\zeta\omega_n}{\omega_d^2} e^{-\zeta\omega_n t} \cos(\omega_d t) \right] \sin(\omega_n t) & \zeta > 1 \end{cases}$
$\frac{b_0}{a_0} \frac{1}{s^2 + \omega_n^2}$	Oscila-tor, cînd $\zeta=0$	$h_p(t) = \frac{b_0}{a_0} \frac{1}{\omega_n} \sin(\omega_n t)$



Comportamentul SALIT de ordin II pentru diferiți factori de amortizare

($\zeta=0.1; 0.4; 1.; 1.7$)

DIVIZOR DE TENSIUNE



Notăm cu I curentul din circuit, care străbate cele două impedanțe.

Se notează cu U tensiunea pe întreaga grupare serie, și cu U_1 , respectiv U_2 , tensiunile la bornele celor două impedanțe. $Z_p = Z_1 + Z_2$ este impedanța echivalentă a grupării serie.

Vom avea:

$$U = I \cdot Z_p = I \cdot (Z_1 + Z_2)$$

$$U_1 = I \cdot Z_1$$

Obținem

$$\frac{U_1}{U} = \frac{I \cdot Z_1}{I \cdot (Z_1 + Z_2)} = \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow U_1 = U \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Similar, din

$$U = I \cdot (Z_1 + Z_2)$$

$$U_2 = I \cdot Z_2$$

se obține

$$\frac{U_2}{U} = \frac{I \cdot Z_2}{I \cdot (Z_1 + Z_2)} = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow U_2 = U \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

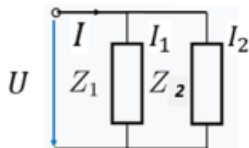
Reținem, așadar, relațiile

$$U_1 = U \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

$$U_2 = U \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Cu privire la divizorul de tensiune, utilizat în rezolvarea unor probleme, haideți să ne aducem aminte ce reprezintă acesta. Circuitul este cel figurat.

DIVIZOR DE CURENT



Căderea de tensiune la bornele grupării paralele se notează cu U .
Se notează cu I curentul din circuit, care străbate gruparea paralel,
și cu I_1 , respectiv I_2 , curenții care străbat separat cele două
impedanțe.

Impedanța echivalentă Z_p pentru gruparea paralel are valoarea:

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} \Rightarrow Z_p = \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Vom avea

$$U = I_1 Z_1 = I_2 \cdot Z_2 = I \cdot Z_p = I \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Din

$$I_1 Z_1 = I \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow I_1 = I \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2},$$

iar din

$$I_2 Z_2 = I \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2}{Z_1 + Z_2} \Rightarrow I_2 = I \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}.$$

Reținem, așadar, relațiile:

$$I_1 = I \cdot \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

$$I_2 = I \cdot \frac{Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

Foarte util în rezolvarea unor probleme poate să fie și divizorul de curent, nu atât de frecvent utilizat precum divizorul de tensiune, dar suficient de important. Să ne amintim ce reprezintă. Circuitul este cel figurat.

TRANSFORMATĂ LAPLACE

Instrument matematic utilizat în analiza circuitelor

Argument: ecuațiile diferențiale / integrale, care descriu bobinele și condensatorii, sunt mult mai simplu de exprimat în domeniul Laplace decât în domeniul timp.

În cazul rezistorului de rezistență R :

- în domeniul timp: $u(t) = Ri(t)$ sau $i(t) = \frac{1}{R}u(t)$
- în domeniul Laplace: $U(s) = RI(s)$ sau $I(s) = \frac{1}{R}U(s)$

În cazul bobinei de inductanță L :

- în domeniul timp: $U(t) = L \frac{di(t)}{dt}$ sau $i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$
- în domeniul Laplace: $U(s) = sLI(s)$, respectiv $I(s) = \frac{1}{sL}U(s)$

În cazul condensatorului de capacitate C :

- în domeniul timp: $u(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau$ sau $i(t) = C \frac{du(t)}{dt}$
- în domeniul Laplace: $U(s) = \frac{1}{sC}I(s)$, respectiv $I(s) = sC U(s)$

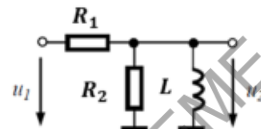
Ne vom aminti acum câteva lucruri importante privind utilizarea transformatei Laplace în circuitele cu rezistoare, bobine și condensatori. Vom analiza, apoi, câteva SALIT de ordin 1, fiecare dintre acestea încadrându-se în una dintre situațiile menționate în tabelul corespunzător, analizat anterior.

PROBLEMA 1

Să se determine funcția de transfer

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$

corespunzătoare circuitului din figură?



REZOLVARE

Folosim transformata Laplace în analiza circuitului.
Funcția de transfer în cazul acestui circuit este

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$

Grupării paralele, pe care se culege semnalul de ieșire, îi va corespunde impedanța

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{sL} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow Z_p = \frac{sL \cdot R_2}{sL + R_2}$$

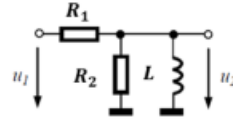
Considerând divizorul de tensiune format în circuit, putem scrie

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot \frac{Z_p}{R_1 + Z_p}$$

Așadar funcția de transfer are valoarea

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_p}{R_1 + Z_p} = \frac{\frac{sL \cdot R_2}{sL + R_2}}{R_1 + \frac{sL \cdot R_2}{sL + R_2}} = \frac{sLR_2}{sL(R_1 + R_2) + R_1R_2}$$

Funcția de transfer este adimensională, fiind raport de tensiuni. Ea corespunde, conform tabelului de la *Comportamentul SALIT de ordin 1*, unui filtru trece-sus.

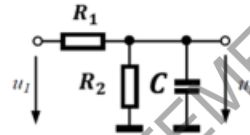


PROBLEMA 2

Să se determine funcția de transfer

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$

corespunzătoare circuitului din figură?



REZOLVARE

Folosim transformata Laplace în analiza circuitului.

Funcția de transfer în cazul acestui circuit este

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$$

Grupării paralel, pe care se culege semnalul de ieșire, îi va corespunde impedanță

$$\frac{1}{Z_p} = \frac{1}{\frac{1}{sC}} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow Z_p = \frac{\frac{1}{sC} \cdot R_2}{\frac{1}{sC} + R_2} = \frac{R_2}{1 + sCR_2}$$

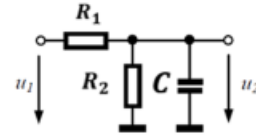
Considerând divizorul de tensiune format în circuit, putem scrie

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot \frac{Z_p}{R_1 + Z_p}$$

Așadar funcția de transfer are valoarea

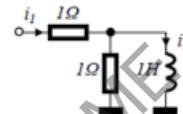
$$H(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{Z_p}{R_1 + Z_p} = \frac{\frac{R_2}{1 + sCR_2}}{R_1 + \frac{R_2}{1 + sCR_2}} = \frac{R_2}{sCR_1R_2 + R_1 + R_2}$$

Funcția de transfer este adimensională, fiind raport de tensiuni. Ea corespunde, conform tabelului de la Comportamentul SALIT de ordin 1, unui filtru trece-jos (integrator cu pierderi).



PROBLEMA 3

Să se determine funcția de transfer corespunzătoare circuitului din figură?



REZOLVARE:

Notăm $R = 1\Omega$ și $L = 1H$.

Funcția de transfer (adimensională) în acest caz, este dată de raportul de curenți

$$H(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)}.$$

Deoarece avem de a face cu un divizor de curent, deducem imediat că

$$I_2(s) = I_1(s) \cdot \frac{R}{R + sL} = I_1(s) \cdot \frac{1}{1 + s}$$

Așadar

$$H(s) = \frac{I_2(s)}{I_1(s)} = \frac{1}{1 + s}$$

PROBLEMA 4

Să se determine funcția de transfer corespunzătoare circuitului din figură.

REZOLVARE:

Notăm $R = 1\Omega$ și $L = 1H$.

Funcția de transfer, în acest caz o **impedanță**, este dată de raportul

$$H(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)}.$$

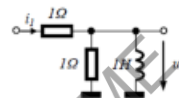
METODA 1

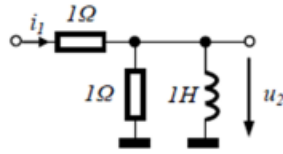
Deoarece avem de a face cu un divizor de curent, deducem imediat că curentul care trece, spre exemplu, prin bobină este dat de

$$I_2(s) = I_1(s) \cdot \frac{R}{R + sL} = I_1(s) \cdot \frac{1}{1 + s}$$

Tensiunea la bornele bobinei este deci:

$$U_2(s) = I_2(s) \cdot sL = I_1(s) \cdot \frac{1}{1 + s} \cdot s \cdot 1 = I_1(s) \cdot \frac{s}{s + 1} \Rightarrow H(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)} = \frac{s}{s + 1}$$





METODA 2

Păstrăm notațiile $R = 1\Omega$ și $L = 1H$.

Pentru gruparea paralel avem

$$Z_p = \frac{sL \cdot R}{sL + R} = \frac{s}{s + 1}$$

Obținem imediat că

$$U_2(s) = I_1(s) \cdot Z_p = I_1(s) \cdot \frac{s}{s + 1} \Rightarrow H(s) = \frac{U_2(s)}{I_1(s)} = \frac{s}{s + 1}$$

PROBLEMA 5

Să se determine funcția de transfer corespunzătoare circuitului din figură.

REZOLVARE:

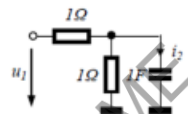
Notăm $R = 1\Omega$ și $C = 1F$.

Funcția de transfer, în acest caz o **admitanță**, este dată de raportul

$$H(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)}.$$

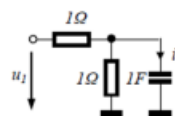
Grupării paralele îi va corespunde impedanța

$$Z_p = \frac{\frac{1}{sC} \cdot R}{\frac{1}{sC} + R} = \frac{R}{1 + sCR} = \frac{1}{s + 1}$$



Din divizorul de tensiune obținem căderea de tensiune pe gruparea paralel

$$U_2(s) = U_1(s) \cdot \frac{Z_p}{R + Z_p} = U_1(s) \cdot \frac{\frac{1}{s+1}}{1 + \frac{1}{s+1}} = U_1(s) \cdot \frac{1}{s+2}$$



Însă:

$$U_2(s) = I_2(s) \cdot \frac{1}{sC} = I_2(s) \cdot \frac{1}{s}$$

Așadar, din cele două relații, obținem egalitatea

$$U_1(s) \cdot \frac{1}{s+2} = I_2(s) \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow H(s) = \frac{I_2(s)}{U_1(s)} = \frac{s}{s+2}$$