

CURSUL 12

Transformata Laplace inversă. Calculul transformatei Laplace inverse.
Aplicații.

Caracterizarea SALIT folosind transformata Laplace, în ceea ce privește:

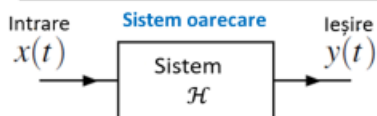
- Interconectarea sistemelor.
- Cauzalitatea.
- BIBO-stabilitatea.
- Inversabilitatea.
- Descrierea cu ajutorul ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți.

Aplicații.

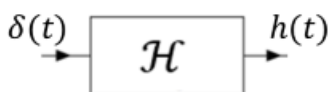
Utilizarea transformatei Laplace în analiza circuitelor.
Aplicații.

Am introdus un instrument matematic important pentru studiul semnalelor și sistemelor, cunoscut sub denumirea de *transformată Laplace*. Am văzut că aceasta poate fi privită ca o generalizare a transformatei Fourier (clasice). Datorită caracterului său mai general, transformata Laplace are o serie de avantaje comparativ cu transformata Fourier. Ne vom axa astăzi pe rezolvarea unor probleme ce utilizează acest nou instrument de lucru. Iată ce vom discuta. Să urmărim pe slide.

O SCURTĂ RECAPITULARE



$$h(t) = \mathcal{H}\{\delta(t)\}$$



Dacă se cunoaște răspunsul la impuls al unui SALIT, $h(t)$



$$y(t) = \mathcal{H}\{x(t)\}$$

$$y(t) = x(t) * h(t)$$



Atunci se poate calcula răspunsul SALIT la orice semnal de intrare $x(t)$

Un sistem de tip SALIT este complet caracterizat de răspunsul său la impuls.

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

2

Facem o scurtă recapitulare. Un sistem oarecare l-am reprezentat sub formă de diagramă bloc.

După ce am discutat despre anumite caracteristici pe care le pot avea sistemele, am pus în evidență o categorie specială de sisteme: SALIT. Pe acestea le reprezentăm ca în figură, etichetându-le cu răspunsul la impuls $h(t)$. Cine este acesta?

El nu este nimic altceva decât răspunsul sistemului atunci când semnalul de intrare este un impuls Dirac-delta.

La ce ne folosește?

Am evidențiat în cursurile anterioare faptul că dacă se aplică pe intrarea unui SALIT un semnal de intrare oarecare $x(t)$, atunci semnalul de ieșire poate fi calculat ca fiind convoluția dintre semnalul de intrare și răspunsul SALIT la impuls, $y(t) = x(t) * h(t)$.

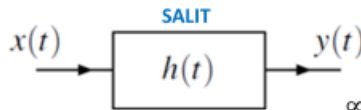
Așadar, dacă se cunoaște răspunsul la impuls al SALIT

Se poate calcula răspunsul SALIT la orice semnal aplicat pe intrare.

CONCLUZIE IMPORTANTĂ: Un sistem de tip SALIT este complet caracterizat de răspunsul lui la impuls.

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

CONTINUĂM...



$$y(t) = (x * h)(t) = (h * x)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t - \tau)d\tau$$

$$\begin{aligned} x(t) &\stackrel{TL}{\leftrightarrow} X(s), \text{ având RC notată cu } R_1 \\ h(t) &\stackrel{TL}{\leftrightarrow} H(s), \text{ având RC notată cu } R_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} y(t) &= (x * h)(t) = (h * x)(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} Y(s) = H(s) \cdot X(s) \\ &\text{având RC notată cu } R, \text{ unde } R_1 \cap R_2 \subset R \end{aligned}$$

Proprietatea de convoluție în domeniul timp a transformatei Laplace

Convoluția în domeniul timp este dificil de calculat, folosind definiția, deoarece presupune calcul integral laborios.

Pentru a evita calculul de convoluții, „artificiul” folosit de noi este utilizarea transformatelor (Fourier și Laplace).

În cazul transformatei Laplace, după cum am văzut:

dacă $x(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X(s)$, având RC notată cu R_1 , și $h(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} H(s)$, având RC notată cu R_2 ,

atunci

$$(x * h)(t) = (h * x)(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} H(s)X(s),$$

având RC notată cu R , care va conține intersecția $R_1 \cap R_2$.

Această proprietate este cunoscută ca **proprietatea de convoluție în domeniul timp a transformatei Laplace**.

Convoluția din domeniul timp devine produs simplu în domeniul Laplace (domeniul frecvență complexă).

Ca o consecință directă a acestei proprietăți, este mai ușor de operat cu

SĂLIT în domeniul Laplace decât în domeniul timp.

Așadar, pentru a evita calculul convoluției în domeniul timp, preferăm să trecem în domeniul Laplace, unde acestea îi corespunde un simplu produs de transformate Laplace.

Însă răspunsul sistemului îl dorim exprimat sub forma $y(t)$, adică în domeniul timp. Pentru a ajunge din domeniul Laplace, adică de la $Y(s)$, în domeniul timp, adică la $y(t)$, trebuie să apelăm la transformata Laplace inversă.

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

CALCULUL TRANSFORMATEI LAPLACE INVERSE

Transformata Laplace a funcției x , notată prin $\mathcal{L}\{x\}$ sau X , se definește prin

$$X(s) = \mathcal{L}\{x\} = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \text{ unde: } s = \sigma + j\omega.$$

Transformata Laplace inversă a lui X , notată cu $\mathcal{L}^{-1}\{X\}$ sau cu x , este dată prin relația

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds,$$

unde $\sigma = \text{Re}\{s\}$ aparține regiunii de convergență (RC) a lui X .

Perechea determinată de transformata Laplace, în domeniile timp și frecvență, este notată prin

$$x(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X(s)$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

4

Am văzut că transformata Laplace pentru x , notată prin $\mathcal{L}\{x\}$ sau X , s-a definit prin

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt.$$

Transformata Laplace inversă a lui X , notată cu $\mathcal{L}^{-1}\{X\}$ sau, simplu, x , este dată prin relația

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} dt,$$

unde $\sigma = \text{Re}\{s\}$ aparține regiunii de convergență (RC) a lui X (adică regiunea din planul complex pentru care transformata Laplace există).

De obicei nu calculăm transformata Laplace inversă folosind direct ecuația de mai sus. În cazul funcțiilor raționale transformata Laplace inversă poate fi mai ușor calculată folosind descompunerea în fracții simple. Folosind această descompunere putem exprima o funcție rațională ca sumă de funcții raționale de ordin inferior, a căror transformată Laplace inversă poate fi găsită, de obicei, în tabele.

APLICAȚIA 1

Să se determine transformata Laplace inversă $x(t)$ dacă

$$X(s) = \frac{2}{s^2 - s - 2}$$

Pentru: $-1 < \operatorname{Re}(s) < 2$.

Determinarea polilor și factorizarea numitorului

Ținem cont de modul în care se factorizează o funcție de gradul al doilea:

$$as^2 + bs + c = a(s - s_1)(s - s_2),$$

unde s_1 și s_2 sunt rădăcinile ecuației de gradul al doilea

$$as^2 + bs + c = 0, \quad s_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

$$s^2 - s - 2 = 0; s_1 = -1, s_2 = 2;$$

$$s^2 - s - 2 = (s + 1)(s - 2)$$

REZOLVARE:

Descompunem în factori de gradul întâi numitorul și obținem:

$$X(s) = \frac{2}{s^2 - s - 2} = \frac{2}{(s+1)(s-2)}.$$

Pentru a descompune funcția rațională în fracții simple vom scrie:

$$X(s) = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)} = \frac{(A+B)s - 2A + B}{(s+1)(s-2)} = \frac{2}{(s+1)(s-2)}$$

Rezultă imediat sistemul de două ecuații cu două necunoscute:

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -2A + B &= 2 \end{aligned}$$

cu soluția:

$$A = -\frac{2}{3}; B = \frac{2}{3}.$$

Așadar:

$$X(s) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-2}.$$

Prin urmare, folosind liniaritatea:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X\} = -\frac{2}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{2}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}.$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

7

Cum rădăcinile ecuației de gradul al doilea $s^2 - s - 2 = 0$, adică polii acestei transformate Laplace, sunt -1 și 2, descompunem în factori de gradul întâi numitorul și obținem:

$$X(s) = \frac{2}{(s+1)(s-2)}.$$

Pentru a descompune funcția rațională în fracții simple vom scrie

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s-2} = \frac{A(s-2) + B(s+1)}{(s+1)(s-2)} = \frac{(A+B)s - 2A + B}{(s+1)(s-2)} \\ &= \frac{2}{(s+1)(s-2)} \end{aligned}$$

Rezultă imediat sistemul de două ecuații cu două necunoscute

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \\ -2A + B &= 2 \end{aligned}$$

cu soluția

$$A = -\frac{2}{3}; B = \frac{2}{3}.$$

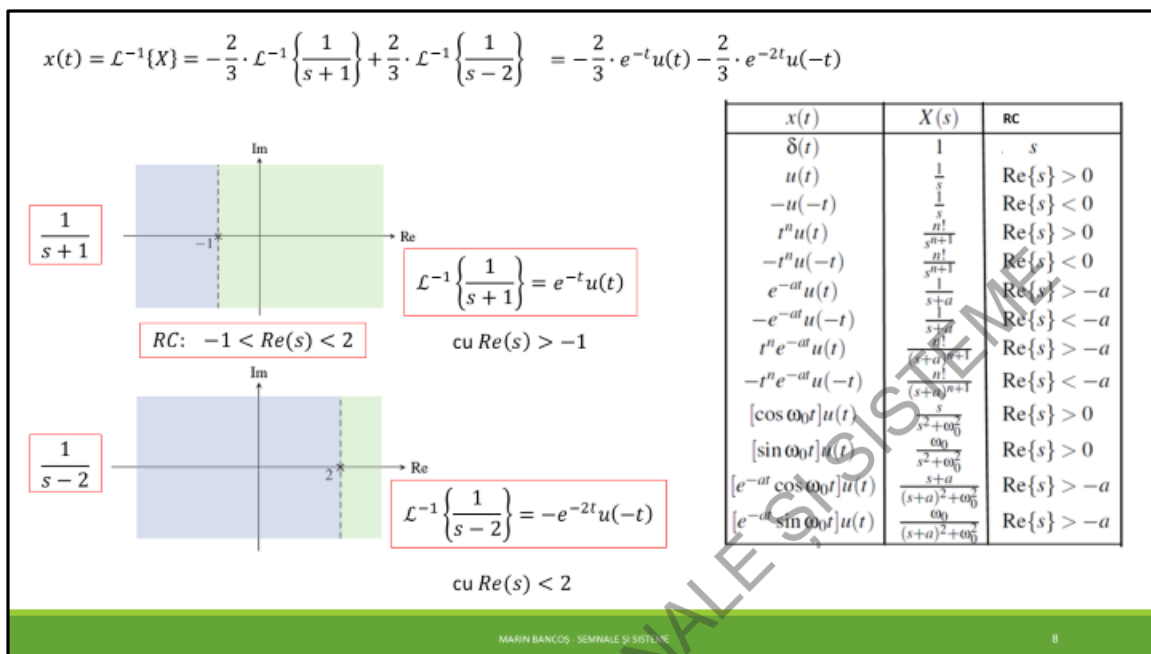
Așadar

$$X(s) = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s+1} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{s-2}.$$

Prin urmare

$$\mathcal{L}^{-1}\{X\} = -\frac{2}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{2}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\}.$$

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME



În acest punct este important să ne amintim că fiecare transformată Laplace are o RC asociată, conform tabelului cu transformatele uzuale. Deci, atunci când calculăm transformata Laplace inversă a unei funcții, trebuie să avem grijă să utilizăm RC-ul corect pentru fiecare funcție care intervine. Astfel, pentru a calcula cele două transformate Laplace inverse care apar aici, trebuie să asociem RC corectă cu fiecare dintre expresii.

Singura variantă posibilă, pentru a avea RC conform enunțului, este ca aceasta să provină din intersecția semiplanelor definite de

$$-1 < \text{Re}(s),$$

și respectiv

$$\text{Re}(s) < 2.$$

Prin urmare, din tabelul cu transformatele Laplace uzuale vom avea că

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = -e^{-2t}u(-t)$$

Se obține, deci, că:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X\} = -\frac{2}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} + \frac{2}{3} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-2}\right\} = -\frac{2}{3} \cdot e^{-t}u(t) - \frac{2}{3} \cdot e^{-2t}u(-t)$$

Așadar:

$$x(t) = -\frac{2}{3} \cdot e^{-t}u(t) - \frac{2}{3} \cdot e^{-2t}u(-t)$$

APLICAȚIA 2

Să se determine transformata Laplace inversă $x(t)$ pentru

$$X(s) = \frac{2s + 1}{(s + 1)^2(s + 2)}$$

unde $\operatorname{Re}(s) > -1$.

REZOLVARE:

$$X(s) = \frac{2s+1}{(s+1)^2(s+2)}$$

Pentru a descompune funcția rațională în fracții simple vom scrie

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{A}{s+1} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+2} = \frac{A(s+1)(s+2) + B(s+2) + C(s+1)^2}{(s+1)^2(s+2)} \\ &= \frac{(A+C)s^2 + (3A+B+2C)s + 2A+2B+C}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{2s+1}{(s+1)^2(s+2)} \end{aligned}$$

Rezultă imediat sistemul de trei ecuații cu trei necunoscute

$$\begin{aligned} A + C &= 0 \\ 3A + B + 2C &= 2 \\ 2A + 2B + C &= 1 \end{aligned}$$

cu soluția

$$A = 3, \quad B = -1, \quad C = -3.$$

Așadar

$$X(s) = \frac{3}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} - \frac{3}{s+2}.$$

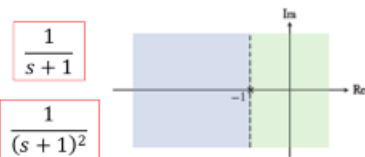
Prin urmare, folosind liniaritatea:

$$\mathcal{L}^{-1}\{X\} = 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}.$$

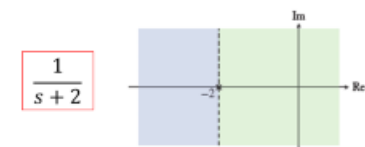
De această dată numitorul funcției raționale este deja scris ca produs de factori de ordin întâi.

Avem, însă, de a face cu un pol multiplu de ordin 2 în $s = -1$. Vă reamintesc cum se procedează la descompunerea în fracții simple într-un astfel de caz.

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}\{X\} = 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} - 3 \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = 3e^{-t}u(t) - te^{-t}u(t) - 3e^{-2t}u(t)$$



RC: $\text{Re}(s) > -1$



$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\} = e^{-t}u(t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+1)^2}\right\} = te^{-t}u(t)$$

ambele cu $\text{Re}(s) > -1$

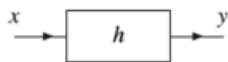
$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\} = e^{-2t}u(t)$$

cu $\text{Re}(s) > -2$

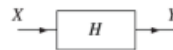
$x(t)$	$X(s)$	RC
$\delta(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$u(t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-u(-t)$	$\frac{1}{s}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$t^n u(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$-t^n u(-t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\text{Re}\{s\} < 0$
$e^{-at}u(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$-e^{-at}u(-t)$	$\frac{1}{s+a}$	$\text{Re}\{s\} < -a$
$t^n e^{-at}u(t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$-t^n e^{-at}u(-t)$	$\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$\text{Re}\{s\} < -a$
$[\cos \omega_0 t]u(t)$	$\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$[\sin \omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > 0$
$[e^{-at} \cos \omega_0 t]u(t)$	$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$
$[e^{-at} \sin \omega_0 t]u(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$	$\text{Re}\{s\} > -a$

Acum, pentru a calcula cele trei transformate Laplace inverse care apar aici, trebuie să asociem o RC la fiecare dintre cele trei expresii. Trebuie să avem grijă deoarece fiecare dintre aceste expresii are mai multe RC posibile și doar una este corectă. RC-urile posibile pentru fiecare dintre aceste expresii sunt prezentate în figură. În cazul fiecăreia dintre aceste expresii, RC corectă este cea care conține RC a lui X (adică, $\text{Re}(s) > -1$). Urmărim pe slide. Imediat, făcând înlocuirile, se obține expresia pentru $x(t)$.

Caracterizarea SALIT folosind transformata Laplace



În domeniul timp
 $y(t) = (x * h)(t)$



În domeniul Laplace
 $Y(s) = X(s)H(s)$

H - *funcția de transfer a sistemului* (sau *funcția de sistem*) = transformata Laplace a răspunsului h la impuls al SALIT

Un SALIT este complet caracterizat prin funcția sa de transfer.

OBSERVAȚIE:

Dacă RC a lui H include axa imaginară $s = j\omega$, atunci $H(s)|_{s=j\omega}$ este chiar răspunsul în frecvență al SALIT, pe care l-am notat cu $H(\omega)$ sau $H(j\omega)$.

Considerăm un SALIT de intrare x , ieșire y și răspuns la impuls h . Fie X, Y și H transformatele Laplace ale lui x, y și, respectiv, h . Continuăm. Deoarece în domeniul timp $y(t) = (x * h)(t)$, avem din proprietatea transformatei Laplace privind convoluția în domeniul timp că sistemul este caracterizat în domeniul Laplace prin $Y(s) = X(s)H(s)$.

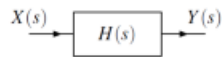
Din punct de vedere terminologic, ne referim la H ca fiind *funcția de transfer a sistemului* sau *funcția de sistem*. Așadar, funcția de transfer a sistemului o definim ca fiind transformata Laplace a răspunsului h al respectivului SALIT la impuls.

Un SALIT este complet caracterizat prin funcția sa de transfer notată H .

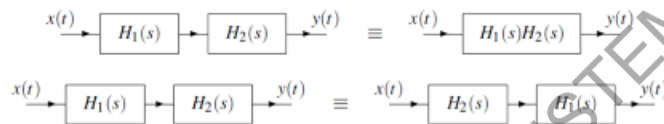
Dacă RC a lui H include axa imaginară $s = j\omega$, atunci $H(s)|_{s=j\omega}$ este chiar răspunsul în frecvență al SALIT, pe care l-am notat cu $H(\omega)$ sau $H(j\omega)$.

Diagramă bloc. Interconectarea SALIT. Reprezentare în domeniul Laplace.

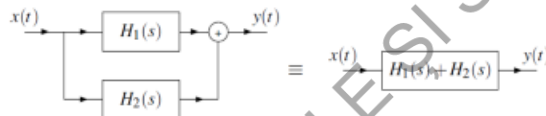
DIAGRAMA BLOC



SERIE



PARALEL



MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

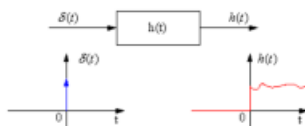
13

Considerăm un SALIT de intrare x , ieșire y și răspuns la impuls h , și fie X, Y și H transformatele Laplace ale lui x, y și, respectiv, h . Adesea, este convenabil să reprezentăm un astfel de sistem sub formă de bloc în domeniul Laplace, exact așa cum se arată în slide. Deoarece un SALIT este complet caracterizat de funcția sa de transfer, se etichetează blocul cu această notație: $H(s)$.

Interconectarea în serie a două sisteme de tip SALIT, având funcțiile de transfer H_1 și H_2 , este un tot un sistem de tip SALIT având funcția de transfer $H = H_1 H_2$. Evident au loc echivalențele prezentate în slide.

Interconectarea în paralel a două sisteme de tip SALIT, având funcțiile de transfer H_1 și H_2 , este tot un sistem de tip SALIT având funcția de transfer $H = H_1 + H_2$. Așadar avem echivalența prezentată în slide.

Cauzalitatea unui SALIT interpretată cu ajutorul transformatei Laplace



Teorema 1: RC asociată funcției de transfer (funcției de sistem) a unui SALIT causal este semiplanul drept sau întreg planul complex.

Teorema 2: Pentru un SALIT având o funcție rațională ca funcție de transfer (funcție de sistem), H , este asigurată cauzalitatea sistemului dacă și numai dacă RC a lui H este semiplanul din dreapta polului cel mai din dreapta sau, dacă H nu are poli, RC este dată de întregul plan complex.

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

14

Am văzut că un sistem este **cauzal** dacă la un moment oarecare de timp ieșirea sa depinde numai de intrarea sistemului la momentele anterioare de timp sau, cel mult, de momentul prezent, și nu depinde de ce vom avea pe intrare în viitor.

Dacă, în particular, un SALIT este causal, atunci răspunsul său la impuls este un semnal causal și, prin urmare, $h(t)$ este un semnal de durată infinită la dreapta. De aici, pe baza a ceea ce am parcurs anterior, obținem următorul rezultat:

Teoremă: RC asociată funcției de transfer (funcției de sistem) a unui SALIT causal este semiplanul drept sau întreg planul complex.

În general, reciproca teoremei de mai sus nu este adevărată. Respectiv, dacă RC asociată funcției de transfer (funcției de sistem) este semiplanul drept sau întreg planul complex, nu este neapărat necesar ca sistemul să fie causal. Totuși, dacă funcția de transfer este o funcție rațională, avem reciproca valabilă, așa cum este exprimat și în teorema următoare.

Teorema: Pentru un SALIT având funcția de transfer (funcția de sistem), H , o funcție rațională, avem asigurată cauzalitatea sistemului dacă și numai dacă RC a lui H este semiplanul din dreapta polului cel mai din dreapta sau, dacă H nu are poli, întregul plan complex.

Dăm, în cele ce urmează, câteva exemple.

APLICAȚIA 3: Considerând un SALIT descris de funcția de sistem dată mai jos, determinați dacă sistemul este sau nu este unul cauzal.

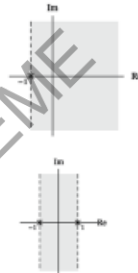
- a) $H(s) = \frac{1}{s+1}$ pentru $\text{Re}(s) > -1$;
 b) $H(s) = \frac{1}{s^2-1}$ pentru $-1 < \text{Re}(s) < 1$;
 c) $H(s) = \frac{e^s}{s+1}$ pentru $\text{Re}(s) < -1$;

Polii lui H sunt reprezentați în figură și RC este figurată prin zona gri.

a) Aici funcția de transfer H este una rațională (având doar polul $s = -1$), iar RC este dată de semiplanul din dreapta polului cel mai din dreapta. Prin urmare, sistemul este cauzal.

b) Aici funcția de transfer H este una rațională (având polii $s = -1$ și $s = 1$), dar RC nu este semiplanul din dreapta polului cel mai din dreapta ($s = 1$) sau întregul plan complex. Prin urmare, sistemul nu este cauzal.

c) Aici funcția de transfer H (având doar polul $s = -1$) are ca RC un semiplan stâng. Prin urmare, răspunsul la impuls al sistemului, h , este un semnal de durată infinită la stânga, și nu la dreapta. Așadar sistemul sigur nu este unul cauzal.



Considerând un SALIT descris de funcția de sistem dată mai jos, determinați dacă sistemul este cauzal.

- a) $H(s) = \frac{1}{s+1}$ pentru $\text{Re}(s) > -1$;
 b) $H(s) = \frac{1}{s^2-1}$ pentru $-1 < \text{Re}(s) < 1$;
 c) $H(s) = \frac{e^s}{s+1}$ pentru $\text{Re}(s) < -1$;

Polii lui H sunt reprezentați în figură și RC este figurată prin zona gri.

- a) Aici funcția de transfer H este una rațională, iar RC este dată de semiplanul din dreapta polului cel mai din dreapta. Prin urmare, sistemul este cauzal.
 b) Aici funcția de transfer H este una rațională, dar RC nu este semiplanul din dreapta polului cel mai din dreapta sau întregul plan complex. Prin urmare, sistemul nu este cauzal.
 c) Aici funcția de transfer H are ca RC un semiplan stâng. Prin urmare, răspunsul la impuls al sistemului, h , este un semnal de durată infinită la stânga, și nu la dreapta. Așadar sistemul sigur nu este unul cauzal.

BIBO – stabilitatea unui SALIT interpretată cu ajutorul transformatei Laplace

Teorema 1: Un SALIT oarecare este BIBO-stabil dacă și numai dacă RC a funcției sale de transfer (adică a funcției sale de sistem) conține întreaga axa imaginară (respectiv pe $Re(s) = 0$).

Teorema 2: Un SALIT cauzal având o funcție de transfer (sistem) rațională, H , este BIBO-stabil, dacă și numai dacă toți polii lui H se află în jumătatea stângă a planului complex (adică toți polii au părțile reale negative).

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

16

În această secțiune analizăm relația dintre funcția de transfer (sau funcția de sistem) a unui SALIT și BIBO-stabilitatea sa.

Ne aducem aminte că:

Un sistem de intrare x și ieșire y se numește *sistem stabil* (sau *BIBO-stabil*, de la Bounded Input - Bounded Output, adică Intrare Mărginită – Ieșire Mărginită), dacă

$$|x(t)| < \infty, (\forall) t \Rightarrow |y(t)| < \infty, (\forall) t.$$

De asemenea:

Un SALIT, având răspunsul la impuls notat cu h , este BIBO-stabil dacă și numai dacă h este o funcție absolut integrabilă, respectiv:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt < \infty$$

Primul rezultat important este dat de următoarea teoremă.

Teorema 1: Un SALIT oarecare este BIBO-stabil dacă și numai dacă RC a funcției sale de transfer (adică a funcției sale de sistem) conține întreaga axa imaginară (respectiv $Re(s) = 0$).

Teorema 2: Un SALIT cauzal având o funcție de transfer (sistem) rațională, H , este BIBO-stabil, dacă și numai dacă toți polii lui H se află în jumătatea stângă a planului complex (adică toți polii au părțile reale negative).

Din cele două teoreme observăm că, în cazul unui SALIT, caracterizarea proprietății de BIBO-stabilitate se face mult mai simplu în domeniul Laplace (prin intermediul funcției de sistem) decât în domeniul timp (prin intermediul răspunsului la impuls). Din acest motiv analiza stabilității SALIT este de obicei

efectuată folosind transformata Laplace.

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

APLICAȚIA 4: Un SALIT are funcția de transfer (funcția de sistem) dată prin

$$H(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)}.$$

Considerând că sistemul este BIBO-stabil, să se determine RC a lui H .

REZOLVARE:

Funcția de transfer a sistemului este una rațională, având polii -1 și -2. Prin urmare există numai trei posibilități pentru RC:

$$\begin{aligned} Re(s) &< -2 \\ -2 < Re(s) &< -1 \\ Re(s) &> -1 \end{aligned}$$

Deoarece sistemul trebuie să fie BIBO-stabil, trebuie ca RC a lui H să includă întreaga axă imaginară. Prin urmare, singura variantă convenabilă dintre cele trei evidențiate este $Re(s) > -1$.



APLICAȚIA 5: Un SALIT causal are funcția de transfer (funcția de sistem)

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+2s+2)}.$$

Să se determine dacă sistemul este BIBO-stabil.

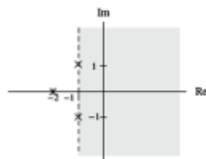
REZOLVARE:

Vom începe prin a factoriza numitorul, descompunând în produs de termeni de gradul întâi. Rădăcinile lui $s^2 + 2s + 2 = 0$ sunt $-1 \pm j$ și deci:

$$H(s) = \frac{1}{(s+2)(s+1+j)(s+1-j)}.$$

Figurăm polii în planul complex (a se vedea figura).

Din moment ce sistemul este considerat causal și toți polii sunt situați în semiplanul complex stâng, avem că sistemul este BIBO-stabil.

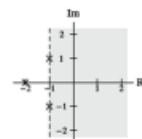


APLICAȚIA 6: Pentru un SALIT este dată funcția de transfer (funcția de sistem)

corespunzătoare. Să se determine, în fiecare caz, RC convenabilă pentru ca sistemul să fie unul BIBO-stabil.

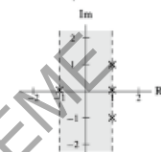
$$H(s) = \frac{s(s-1)}{(s+2)(s+1+j)(s+1-j)}$$

- i) $\operatorname{Re}(s) < -2$,
- ii) $-2 < \operatorname{Re}(s) < -1$,
- iii) $\operatorname{Re}(s) > -1$.



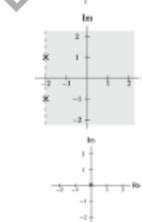
$$H(s) = \frac{s}{(s+1)(s-1)(s-1-j)(s-1+j)}$$

- i) $\operatorname{Re}(s) < -1$,
- ii) $-1 < \operatorname{Re}(s) < 1$,
- iii) $\operatorname{Re}(s) > 1$.



$$H(s) = \frac{(s+j)(s-j)}{(s+2-j)(s+2+j)}$$

- i) $\operatorname{Re}(s) < -2$
- ii) $\operatorname{Re}(s) > -2$



$$H(s) = \frac{s-1}{s}$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

19

Pentru un SALIT este dată funcția de transfer (funcția de sistem) corespunzătoare. Să se determine, în fiecare caz, RC convenabilă pentru ca sistemul să fie unul BIBO-stabil.

- $H(s) = \frac{s(s-1)}{(s+2)(s+1+j)(s+1-j)}$
- $H(s) = \frac{s}{(s+1)(s-1)(s-1-j)(s-1+j)}$
- $H(s) = \frac{(s+j)(s-j)}{(s+2-j)(s+2+j)}$
- $H(s) = \frac{s-1}{s}$

În cazul primei funcții de transfer polii sunt -2, -1-j și -1+j.

Îi figurăm în planul complex.

Numai trei RC ar fi posibile, dar pentru că sistemul trebuie să fie BIBO-stabil, dintre acestea singura care conține axa imaginară este cea de-a treia, marcată cu culoare gri.

În cazul celei de a doua funcții de transfer polii sunt -1, 1, 1-j și 1+j.

Îi figurăm în planul complex.

Avem trei RC posibile, dar pentru a fi asigurată și BIBO-stabilitatea sistemului este necesar ca regiunea aleasă să conțină întreagă axa imaginară. Prin

urmare, RC este cea de a doua, marcată cu culoare gri.

În cazul celei de a treia funcții de transfer polii sunt $-2-j$ și $-2+j$.

Îi figurăm în planul complex.

Avem două RC posibile, dar pentru a fi asigurată și BIBO-stabilitatea sistemului este necesar ca regiunea aleasă să conțină axa imaginară. Prin urmare, RC este cea de a doua, marcată cu culoare gri.

În cazul celei de a patra funcții de transfer avem un singur pol în 0. Acesta nu poate fi, deci, punct de convergență pentru funcția de transfer considerată. Cum el este și pe axa imaginară, RC nu va putea include întreaga axă imaginară și, prin urmare, H nu poate fi asociată cu un sistem BIBO-stabil.

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

Inversabilitatea unui SALIT interpretată cu ajutorul transformatei Laplace

Un SALIT, notat $\mathcal{H}$, având funcția de transfer (funcția de sistem) H , este inversabil dacă și numai dacă există un alt SALIT, notat $\mathcal{H}^{-1}$, având funcția de transfer (funcția de sistem) H_{inv} , astfel încât

$$H(s)H_{inv}(s) = 1.$$

Un SALIT, notat $\mathcal{H}$, având funcția de transfer (funcția de sistem) H , este inversabil dacă și numai dacă există un alt SALIT, notat $\mathcal{H}^{-1}$, cu funcția de transfer (funcția de sistem) H_{inv} , astfel încât

$$H(s)H_{inv}(s) = 1.$$

Deoarece sistemele distincte pot avea funcții de transfer (funcții de sistem) identice, dar cu RC diferite, inversul unui SALIT nu este neapărat unic. În practică, totuși, adesea ne dorim un sistem stabil și/sau cauzal. Prin urmare, deși pot exista mai multe sisteme inverse, noi suntem frecvent interesați doar de varianta unică a sistemului invers (datorită acestor constrângeri suplimentare de stabilitate și/sau cauzalitate).

APLICAȚIA 7:

Se consideră un SALIT având funcția de transfer (funcția de sistem) dată prin

$$H(s) = \frac{s+1}{s+2},$$

pentru $\text{Re}(s) > -2$.

Determinați toate sistemele inverse posibile ale acestuia și analizați BIBO-stabilitatea fiecăruia în parte.

REZOLVARE:

Funcția de transfer (funcția de sistem) a sistemului invers este dată de

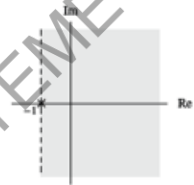
$$H_{inv}(s) = \frac{1}{H(s)} = \frac{s+2}{s+1}.$$

Sunt posibile două RC pentru H_{inv} :

$$1) \text{Re}(s) < -1; \quad 2) \text{Re}(s) > -1.$$

Fiecare RC este asociată unui sistem invers distinct.

În primul caz sistemul invers nu este unul BIBO-stabil, din moment ce RC nu conține axa imaginară, în timp ce în cel de-al doilea caz sistemul este unul BIBO-stabil pentru că RC conține întreaga axa imaginară.



Funcția de transfer în cazul SALIT reprezentate cu ajutorul ecuațiilor diferențiale liniare cu coeficienți constanți

Să considerăm un sistem de intrare x , ieșire y și răspuns la impuls h , caracterizat prin următoarea ecuație

$$\sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t),$$

unde $M \leq N$.

Vom nota cu X, Y și H transformatele Laplace pentru x, y și h . Considerând transformata Laplace pentru ambii membri ai ecuației și aplicând proprietățile acestea vom obține imediat

$$\sum_{k=0}^N b_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M a_k s^k X(s) \Leftrightarrow Y(s) \sum_{k=0}^N b_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^M a_k s^k.$$

Prin urmare, de aici obținem chiar funcția de transfer (funcția de sistem), care este dată de

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k s^k}{\sum_{k=0}^N b_k s^k}.$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

22

Multe SALIT de interes practic pot fi reprezentate folosind ecuațiile diferențiale liniare de un anumit ordin cu coeficienți constanți. Să considerăm un sistem de intrare x , ieșire y și răspuns la impuls h , caracterizat prin următoarea ecuație

$$\sum_{k=0}^N b_k \frac{d^k}{dt^k} y(t) = \sum_{k=0}^M a_k \frac{d^k}{dt^k} x(t),$$

unde $M \leq N$.

Vom nota cu X, Y și H transformatele Laplace pentru x, y și h .

Considerând transformata Laplace pentru ambii membri ai ecuației și aplicând proprietățile acestea vom obține imediat

$$\sum_{k=0}^N b_k s^k Y(s) = \sum_{k=0}^M a_k s^k X(s).$$

Această relație devine

$$Y(s) \sum_{k=0}^N b_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^M a_k s^k.$$

Prin urmare, de aici obținem chiar funcția de transfer (funcția de sistem), care este dată de

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{\sum_{k=0}^M a_k s^k}{\sum_{k=0}^N b_k s^k}.$$

Pentru sistemul de tipul considerat, funcția de transfer (funcția de sistem) este întotdeauna una rațională (raport de două polinoame în s). Acesta este motivul pentru care se acordă un

interes deosebit acestui tip de funcții.

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

APLICAȚIA 8

Un SALIT de intrare x și ieșire y este caracterizat prin ecuația diferențială

$$y''(t) + \frac{D}{M}y'(t) + \frac{K}{M}y(t) = x(t),$$

unde D , K și M sunt constante reale.

Să se determine funcția de transfer (funcția de sistem) pentru acest SALIT.

REZOLVARE:

Considerând transformata Laplace pentru ambii membri ai ecuației date, obținem:

$$s^2Y(s) + \frac{D}{M}sY(s) + \frac{K}{M}Y(s) = X(s).$$

Această relație devine

$$(s^2 + \frac{D}{M}s + \frac{K}{M})Y(s) = X(s) \Leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{D}{M}s + \frac{K}{M}}.$$

Un SALIT de intrare x și ieșire y este caracterizat prin ecuația diferențială

$$y''(t) + \frac{D}{M}y'(t) + \frac{K}{M}y(t) = x(t),$$

unde D , K și M sunt constante reale.

Să se determine funcția de transfer (funcția de sistem) pentru acest SALIT.

REZOLVARE:

Considerând transformata Laplace pentru ambii membri ai ecuației date, obținem:

$$s^2Y(s) + \frac{D}{M}sY(s) + \frac{K}{M}Y(s) = X(s).$$

Această relație devine

$$(s^2 + \frac{D}{M}s + \frac{K}{M})Y(s) = X(s) \Leftrightarrow H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{s^2 + \frac{D}{M}s + \frac{K}{M}}.$$

Transformata Laplace – instrument util în analiza circuitelor

Argumentare: ecuațiile diferențiale/integrale care descriu bobinele și condensatorii sunt mult mai simplu de exprimat în domeniul Laplace decât în domeniul timp.

Transformata Laplace este un instrument foarte util și pentru analiza circuitelor. Utilitatea ei se datorează în bună parte faptului că ecuațiile diferențiale/integrale care descriu bobinele și condensatorii sunt mult mai simplu de exprimat în domeniul Laplace decât în domeniul timp.

Rezistorul ca element de circuit

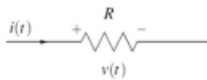
Rezistor = element de circuit care opune rezistență curgerii curentului electric prin circuitul respectiv.

Legea lui Ohm:

- în domeniul timp: $v(t) = Ri(t)$ sau $i(t) = \frac{1}{R}v(t)$

- în domeniul Laplace: $V(s) = RI(s)$ sau $I(s) = \frac{1}{R}V(s)$

Simbolul utilizat



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

25

Un *rezistor* este un element de circuit care opune rezistență curgerii curentului electric prin circuitul respectiv.

Un rezistor cu *rezistența* R intermediază legătura dintre tensiune și curent, prin legea lui Ohm:

$$v(t) = Ri(t).$$

În domeniul Laplace, folosind transformatele Laplace, relația de mai sus devine $V(s) = RI(s)$ sau $I(s) = \frac{1}{R}V(s)$.

În reprezentarea de circuit, un rezistor este notat, de obicei, cu simbolul din figură.

Bobina ca element de circuit

Bobină = element de circuit care realizează conversia unui curent electric în câmp magnetic și invers.

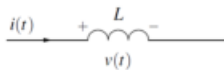
În domeniul timp:

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt} \text{ sau } i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau$$

În domeniul Laplace:

$$V(s) = sLI(s), \text{ respectiv } I(s) = \frac{1}{sL} V(s)$$

Simbolul utilizat



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

26

O *bobină* este un element de circuit care realizează conversia unui curent electric în câmp magnetic și invers.

O bobină cu *inductanța* L intermediază legătura dintre tensiunea la borne și curentul care străbate bobina prin relația

$$v(t) = L \frac{di(t)}{dt}$$

sau echivalent:

$$i(t) = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^t v(\tau) d\tau.$$

În domeniul Laplace, folosind transformatele Laplace, relația de mai sus devine

$$V(s) = sLI(s), \text{ respectiv } I(s) = \frac{1}{sL} V(s).$$

În reprezentarea de circuit, o bobină este notată cu simbolul din figură.

Condensatorul ca element de circuit

Condensator = element de circuit care stochează sarcina electrică.

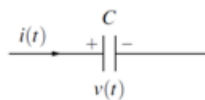
În domeniul timp:

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \text{ sau } i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}.$$

În domeniul Laplace:

$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s), \text{ respectiv} \\ I(s) = sC V(s)$$

Simbolul utilizat



Un *condensator* este un element de circuit care stochează sarcina electrică. Un condensator cu *capacitatea* C intermediază legătura dintre tensiunea la borne și curentul care străbate condensatorul prin relația

$$v(t) = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\tau) d\tau \text{ sau } i(t) = C \frac{dv(t)}{dt}.$$

În domeniul Laplace, folosind transformatele Laplace, relația de mai sus devine

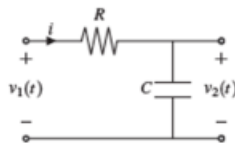
$$V(s) = \frac{1}{sC} I(s), \text{ respectiv} \\ I(s) = sC V(s).$$

În reprezentarea de circuit, un condensator este notat cu simbolul din figură.

APLICAȚIE: Analiza unui circuit RC cu ajutorul transformatei Laplace

Se consideră circuitul din figură, de intrare v_1 și ieșire v_2 . Acesta poate fi asimilat cu un SALIT, el fiind caracterizat printr-o ecuație diferențială liniară cu coeficienți constanți.

- Să se determine funcția de transfer (funcția de sistem) H a acestuia.
- Să se stabilească dacă sistemul este sau nu BIBO-stabil.
- Să se determine ce tip de filtru aproximează acest sistem.
- Să se determine răspunsul sistemului la semnalul treaptă-unitate.



REZOLVARE:

a) Pentru circuitul dat se scriu imediat ecuațiile:

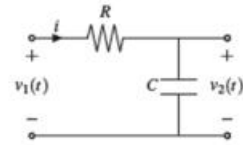
$$v_1(t) = Ri(t) + v_2(t)$$

$$i(t) = C \frac{d}{dt} v_2(t)$$

Folosind transformata Laplace, acestea devin:

$$V_1(s) = RI(s) + V_2(s)$$

$$I(s) = CsV_2(s).$$



Prin înlocuirea celei de a doua relații în prima obținem:

$$V_1(s) = R[CsV_2(s)] + V_2(s)$$

$$\Rightarrow V_1(s) = RCsV_2(s) + V_2(s)$$

$$\Rightarrow V_1(s) = [1 + RCs]V_2(s)$$

$$\Rightarrow \frac{V_2(s)}{V_1(s)} = \frac{1}{1 + RCs}.$$

Așadar funcția de transfer a acestui SALIT este:

$$H(s) = \frac{1}{1 + RCs} = \frac{\frac{1}{RC}}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{\frac{1}{RC}}{s - (-\frac{1}{RC})}$$

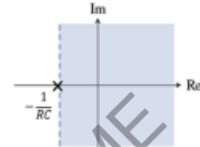
Pentru ca sistemul să fie fizic realizabil el trebuie să fie cauzal. Prin urmare, RC trebuie să corespundă unui semiplan complex drept, adică semiplanului din dreapta polului cel mai din dreapta. Cum există un unic pol, $s = -\frac{1}{RC}$, este necesar ca:

$$\operatorname{Re}(s) > -\frac{1}{RC}.$$

b) Din moment ce rezistența și capacitatea, ca mărimi fizice, sunt valori reale strict pozitive, vom avea că:

$$R > 0, C > 0 \Rightarrow -\frac{1}{RC} < 0$$

Așadar polul funcției de transfer, $s = -\frac{1}{RC}$, este în stânga originii sistemului de axe și deci regiunea de convergență (RC) conține întreaga axa imaginară. Prin urmare sistemul este unul BIBO-stabil.



c) Vom nota cu H_F răspunsul în frecvență al sistemului, adică transformata Fourier a răspunsului la impuls. Din moment ce sistemul este unul BIBO-stabil, vom avea că $H_F(\omega) = H(j\omega)$. Prin urmare:

$$|H_F(0)| = \left| \frac{1}{1 + RC(0)} \right| = 1 \quad \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} |H_F(\omega)| = \lim_{|\omega| \rightarrow \infty} \left| \frac{1}{1 + RCj\omega} \right| = 0$$



Așadar sistemul considerat aproximează, cel mai bine, un filtru trece-jos.

d) Ne propunem să calculăm răspunsul sistemului la semnalul treaptă-unitate $v_1(t) = u(t)$, a cărui transformată Laplace este $V_1(s) = \frac{1}{s}$.

Comportamentul intrare-ieșire al sistemului este caracterizat de ecuația:

$$V_2(s) = H(s)V_1(s) = \left(\frac{1}{1+RCs}\right)V_1(s) = \left(\frac{1}{1+RCs}\right)\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{\frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})}$$

Pentru a obține răspunsul căutat, $v_2(t)$, trebuie să găsim transformata Laplace inversă a lui $V_2(s)$ obținut anterior. Descompunem în fracții simple funcția rațională la care am ajuns, astfel:

$$V_2(s) = \frac{\frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s + \frac{1}{RC}} = \frac{A(s + \frac{1}{RC}) + Bs}{s(s + \frac{1}{RC})} = \frac{(A+B)s + A \cdot \frac{1}{RC}}{s(s + \frac{1}{RC})}$$

Prin identificare obținem imediat că $A + B = 0$ și $A = 1$. Așadar $A = 1$ și $B = -1$.

Deci

$$V_2(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{1}{RC}}$$

Folosind tabelul cu transformate Laplace uzuale, obținem de aici că

$$v_2(t) = u(t) - e^{-\frac{t}{RC}} \cdot u(t) = (1 - e^{-\frac{t}{RC}})u(t)$$