

## CURSUL 11

Transformata Laplace directă și inversă.

Exemple de calcul al transformatei Laplace directe folosind definiția acesteia.

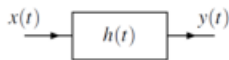
Regiunea de convergență (RC) a transformatei Laplace. Proprietățile RC. Exemplu de calcul.

Proprietățile transformatei Laplace. Tabel cu transformate Laplace uzuale.

Exemple de calcul al transformatei Laplace directe folosind proprietățile acesteia.

Introducem acum un alt instrument matematic important, pentru studiul semnalelor și sistemelor, cunoscut sub denumirea de *transformată Laplace*. Aceasta poate fi privită ca o generalizare a transformatei Fourier (clasice). Datorită caracterului său mai general, transformata Laplace are o serie de avantaje comparativ cu transformata Fourier. În primul rând, putem gestiona cu transformata Laplace unele semnale în timp continuu (funcții) care nu pot fi gestionate cu transformata Fourier. În al doilea rând, deoarece transformarea Laplace este un instrument mai general, ea poate oferi informații suplimentare, dincolo de cele obținute din transformata Fourier.

# Transformata Laplace – generalizare a transformatei Fourier



Pentru un SALIT de intrare  $x$  și ieșire  $y$ , având răspunsul la impuls  $h$ , exponențiala complexă este o funcție proprie (vector propriu), respectiv:

$$x(t) = e^{st} \text{ (cu: } s = \sigma + j\omega) \Rightarrow y(t) = H(s)e^{st},$$

unde:

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt.$$

(funcția de sistem = transformata Laplace a lui  $h$ )

$$s = j\omega \Rightarrow H(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-j\omega t} dt.$$

(răspunsul în frecvență = transformata Fourier a lui  $h$ )

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

2

Am văzut că exponențialele complexe sunt funcții proprii ale SALIT. Vă amintiți ce înseamnă funcția proprie și valoarea proprie?

Să presupunem că avem un astfel de sistem cu răspunsul la impuls  $h$ .

Prin urmare răspunsul  $y(t)$  al sistemului având pe intrare exponențiala complexă  $x(t) = e^{st}$  (unde  $s$  este o constantă complexă oarecare) este dat de

$$y(t) = H(s)e^{st},$$

unde

$$H(s) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{-st} dt.$$

Anterior ne-am referit la  $H$  ca la o funcție de sistem sau ca la răspunsul în frecvență al sistemului.

$H$  este, de fapt, chiar transformata Laplace a lui  $h$ . Integrala aceasta este definiția transformării Laplace.

În cazul particular în care  $s = j\omega$ , unde  $\omega$  este real (și deci  $s$  este într-un astfel de caz număr complex pur imaginar), formula devine chiar transformata Fourier. Anterior spuneam că  $H(j\omega)$  este răspunsul în frecvență al SALIT (adică transformata Fourier a lui  $h$ ).

Deoarece noua formulă include transformata Fourier ca un caz special, transformata Laplace poate fi văzută ca o generalizare a transformatei Fourier (clasice).

## Definirea transformatei Laplace

Transformata Laplace (bilaterală) a funcției  $x$ , notată prin  $\mathcal{L}\{x\}$  sau  $X$ , se definește prin

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \text{ unde: } s = \sigma + j\omega.$$

Transformata Laplace inversă a lui  $X$ , notată cu  $\mathcal{L}^{-1}\{X\}$  sau cu  $x$ , este dată prin relația

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds,$$

unde  $\sigma = \text{Re}\{s\}$  aparține regiunii de convergență (RC) a lui  $X$ .

Perechea determinată de transformata Laplace, în domeniile timp și frecvență, este notată prin

$$x(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X(s)$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

3

Transformata Laplace (bilaterală) a funcției  $x$ , notată prin  $\mathcal{L}\{x\}$  sau  $X$ , se definește prin

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt.$$

Transformata Laplace inversă a lui  $X$ , notată cu  $\mathcal{L}^{-1}\{X\}$  sau  $x$ , este dată prin relația

$$x(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{st} ds,$$

unde  $\sigma = \text{Re}\{s\}$  aparține regiunii de convergență (RC) a lui  $X$  (adică regiunea din planul complex pentru care transformata Laplace există).

Să observăm că aici avem de a face cu o integrală de contur, din moment ce  $s$  este o variabilă complexă.

Ne vom referi la  $x$  și la  $X$  ca la perechea determinată de transformata Laplace, aceasta fiind notată prin

$$x(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X(s).$$

În practică nu se calculează transformata Laplace inversă folosind formula dată, ci

se utilizează alte metode, pe care le vom discuta mai târziu.

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

## Variante diferite ale transformării Laplace

Transformata Laplace bilaterală

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

Transformata Laplace unilaterală

$$X(s) = \int_0^{\infty} x(t)e^{-st} dt$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

4

Sunt utilizate două versiuni ale transformatei Laplace :

1. transformata Laplace bilaterală;
2. transformata Laplace unilaterală.

Transformata Laplace unilaterală este folosită cel mai frecvent pentru rezolvarea sistemelor de ecuații diferențiale liniare cu condiții inițiale diferite de zero. Singura diferență între definițiile celor două tipuri de transformate Laplace se referă la limita inferioară a integralei. În cazul bilateral, limita inferioară este  $-\infty$ , în timp ce în cazul unilateral, limita inferioară este 0.

În general, ne vom referi la transformata Laplace bilaterală. Transformata Laplace unilaterală este un instrument frecvent utilizat în rezolvarea ecuațiilor diferențiale care apar.

Dacă nu este menționat altfel, toate referirile pe le vom face la transformata Laplace, vor fi înțelese ca însemnând transformata Laplace bilaterală.

Reamintim faptul că mulțimea de puncte din planul complex pentru care transformata Laplace există se numește regiune de convergență (RC).

## Relația dintre transformata Laplace și transformata Fourier

$X$ ,  $X_F$  - transformatele Laplace și respectiv Fourier ale semnalului în timp continuu  $x$

$$X(s)|_{s=j\omega} = X_F(\omega)$$

Funcția  $X(s)$  evaluată la o valoare complexă arbitrară  $s = \sigma + j\omega$  (unde  $\sigma = \text{Re}\{s\}$  și  $\omega = \text{Im}\{s\}$ ) poate fi, de asemenea, exprimată și în funcție de transformata Fourier a lui  $x$ .

În particular avem

$$\begin{aligned} X(s)|_{s=\sigma+j\omega} &= X'_F(\omega), \\ \text{unde } X'_F &\text{ este transformata Fourier a lui } x'(t) = e^{-\sigma t}x(t). \text{ Aceasta deoarece:} \\ X(\sigma + j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} [x(t)e^{-\sigma t}]e^{-j\omega t} dt \\ &= \mathcal{F}\{e^{-\sigma t}x(t)\}(\omega). \end{aligned}$$

$$X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{e^{-\sigma t}x(t)\}(\omega).$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

5

Fie  $X$  și  $X_F$  transformatele Laplace și respectiv Fourier ale semnalului în timp continuu  $x$ .

Funcția  $X(s)$  evaluată în  $s = j\omega$  (unde  $\omega$  este real) ne dă  $X_F(\omega)$ , așa cum am văzut deja. Acesta înseamnă  $X(s)|_{s=j\omega} = X_F(\omega)$ .

Datorită relației precedente, transformata Fourier a lui  $x$  este uneori scrisă ca  $X(j\omega)$ .

Funcția  $X(s)$  evaluată la o valoare complexă arbitrară  $s = \sigma + j\omega$  (unde  $\sigma = \text{Re}\{s\}$  și  $\omega = \text{Im}\{s\}$ ) poate fi, de asemenea, exprimată și în funcție de transformata Fourier a lui  $x$ . În particular avem

$$X(s)|_{s=\sigma+j\omega} = X'_F(\omega),$$

unde  $X'_F$  este transformata Fourier a lui  $x'(t) = e^{-\sigma t}x(t)$ . Să justificăm acest lucru.

Deci, în general, transformata Laplace a lui  $x$  este transformata Fourier a unei versiuni ponderate cu o exponențială a lui  $x$ .

Datorită acestei ponderări, transformata Laplace a unui semnal în timp continuu poate exista atunci când transformata Fourier a aceluiași semnal nu există.

## Exemplul 1 de calcul al transformatei Laplace

---

Să se determine transformata Laplace  $X$  a semnalului în timp continuu definit prin funcția:

$$x(t) = e^{-at}u(t),$$

unde  $a$  este o constantă reală.

## REZOLVARE:

Aplicând definiția transformatei Laplace obținem:  $X(s) = \mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\}(s)$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at}u(t)e^{-st}dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(s+a)t}dt \\ &= \left[ \left( -\frac{1}{s+a} \right) e^{-(s+a)t} \right]_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Înlocuim  $s = \sigma + j\omega$  pentru a determina mai ușor când converge expresia obținută către o valoare finită:

$$\begin{aligned} X(s) &= \left[ \left( -\frac{1}{\sigma+a+j\omega} \right) e^{-(\sigma+a+j\omega)t} \right]_0^{\infty} \\ &= \left( \frac{-1}{\sigma+a+j\omega} \right) \left[ e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t} \right]_0^{\infty} \\ &= \left( \frac{-1}{\sigma+a+j\omega} \right) \left[ e^{-(\sigma+a)\infty} e^{-j\omega\infty} - 1 \right]. \end{aligned}$$

Observăm că expresia de mai sus converge numai pentru:  $\sigma + a > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\{s\} > -a$ . În acest caz avem:

$$X(s) = \left( \frac{-1}{\sigma+a+j\omega} \right) [0 - 1] = \frac{1}{s+a}.$$

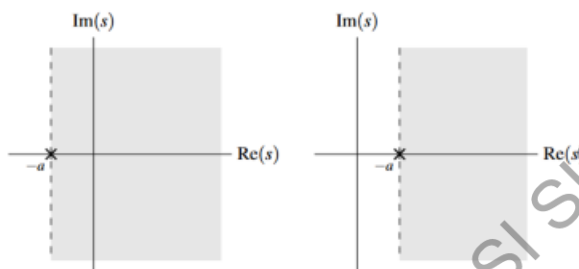
Prin urmare se obține:

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\text{LT}} \frac{1}{s+a}$$

pentru:

$$\text{Re}(s) > -a$$

Regiunea de convergență este ilustrată în figură, pentru cazurile  $a > 0$ , respectiv  $a < 0$ .



MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

8

Regiunea de convergență este ilustrată în figură, pentru cazurile  $a > 0$  și  $a < 0$ .

## Exemplul 2

### de calcul al transformatei Laplace

---

Să se determine transformata Laplace  $X$  a semnalului în timp continuu definit prin funcția:

$$x(t) = -e^{-at}u(-t),$$

unde  $a$  este o constantă reală.

## REZOLVARE:

Aplicând definiția transformatei Laplace obținem:  $X(s) = \mathcal{L}\{-e^{-at}u(-t)\}(s)$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-at}u(-t)e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^0 -e^{-at}e^{-st}dt \\ &= \int_{-\infty}^0 -e^{-(s+a)t}dt \\ &= \left[ \left( \frac{1}{s+a} \right) e^{-(s+a)t} \right]_{-\infty}^0 \end{aligned}$$

Înlocuim  $s = \sigma + j\omega$  pentru a determina mai ușor când converge expresia obținută către o valoare finită:

$$\begin{aligned} X(s) &= \left[ \left( \frac{1}{\sigma+a+j\omega} \right) e^{-(\sigma+a+j\omega)t} \right]_{-\infty}^0 \\ &= \left( \frac{1}{\sigma+a+j\omega} \right) \left[ e^{-(\sigma+a)t} e^{-j\omega t} \right]_{-\infty}^0 \\ &= \left( \frac{1}{\sigma+a+j\omega} \right) \left[ 1 - e^{(\sigma+a)\infty} e^{j\omega\infty} \right] \end{aligned}$$

Observăm că expresia de mai sus converge numai pentru:  $\sigma + a < 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\{s\} < -a$ . În acest caz avem:

$$\begin{aligned} X(s) &= \left( \frac{1}{\sigma+a+j\omega} \right) [1 - 0] \\ &= \frac{1}{s+a} \end{aligned}$$

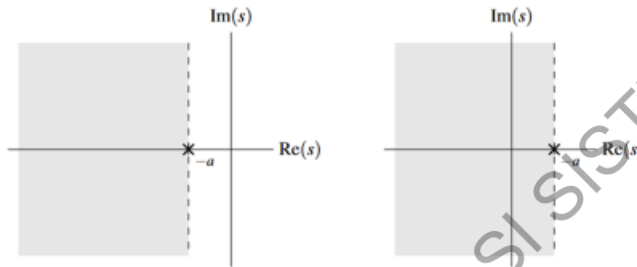
Prin urmare se obține:

$$-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a}$$

pentru:

$$\operatorname{Re}(s) < -a.$$

Regiunea de convergență este ilustrată în figură, pentru cazurile  $a > 0$ , respectiv  $a < 0$ .



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

11

Comparăm rezultatele obținute la acest exemplu cu ceea ce s-a obținut la primul exemplu tratat și facem o observație importantă. Deși expresia algebrică este aceeași în ambele cazuri pentru transformata Laplace obținută, adică

$$X(s) = \frac{1}{s+a},$$

observăm o diferență fundamentală în ceea ce privește regiunile de convergență RC ale transformatelor. Astfel, într-un caz,  $X(s)$  converge pentru  $\operatorname{Re}(s) > -a$ , în timp ce în celălalt caz  $X(s)$  converge pentru  $\operatorname{Re}(s) < -a$ .

Este important de reținut, așadar, că trebuie să specificăm atât expresia algebrică a lui  $X(s)$ , cât și regiunea sa de convergență RC, pentru a se putea determina în mod unic  $x = \mathcal{L}^{-1}\{X\}$ .

## Exemplul 3

### de calcul al transformatei Laplace

---

Să se determine transformata Laplace  $X$  a semnalului treaptă unitate definit în timp continuu :

$$x(t) = u(t).$$

## REZOLVARE:

Aplicând definiția transformatei Laplace obținem:  $X(s) = \mathcal{L}u(s)$

$$\begin{aligned} &= \int_{-\infty}^{\infty} u(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \left[ \left(-\frac{1}{s}\right) e^{-st} \right]_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Înlocuim  $s = \sigma + j\omega$  pentru a determina mai ușor când converge expresia obținută către o valoare finită:

$$\begin{aligned} X(s) &= \left[ \left(-\frac{1}{\sigma + j\omega}\right) e^{-(\sigma + j\omega)t} \right]_0^{\infty} \\ &= \left[ \left(-\frac{1}{\sigma + j\omega}\right) e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} \right]_0^{\infty}. \end{aligned}$$

Observăm că expresia de mai sus converge numai pentru:  $\sigma > 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}\{s\} > 0$ . În acest caz avem:

$$\begin{aligned} X(s) &= \left(-\frac{1}{\sigma + j\omega}\right) [0 - 1] \\ &= \left(-\frac{1}{s}\right) (-1) \\ &= \frac{1}{s}. \end{aligned}$$

Prin urmare se obține:

$$u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s} \quad \text{pentru} \quad \operatorname{Re}(s) > 0.$$

## Exemplul 4 de calcul al transformatei Laplace

---

Să se determine transformata Laplace  $X$  a semnalului următor definit în timp continuu :

$$x(t) = A\delta(t - t_0),$$

unde  $A$  și  $t_0$  sunt constante reale arbitrar considerate.

## REZOLVARE:

Aplicând definiția transformatei Laplace obținem:

$$\begin{aligned}X(s) &= \mathcal{L}\{A\delta(t-t_0)\}(s) \\&= \int_{-\infty}^{\infty} A\delta(t-t_0)e^{-st}dt \\&= A \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)e^{-st}dt.\end{aligned}$$

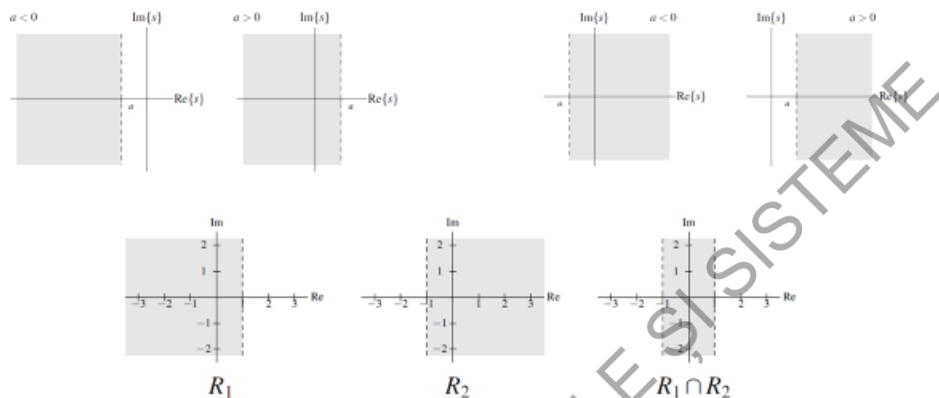
Folosind proprietatea de „sifting”, de sondare a impulsului Dirac-delta, se obține imediat că:

$$X(s) = Ae^{-st_0}.$$

Prin urmare se obține:

$$A\delta(t-t_0) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} Ae^{-st_0} \text{ pentru orice } s.$$

## Semiplan stâng și semiplan drept. Intersecții în planul complex.

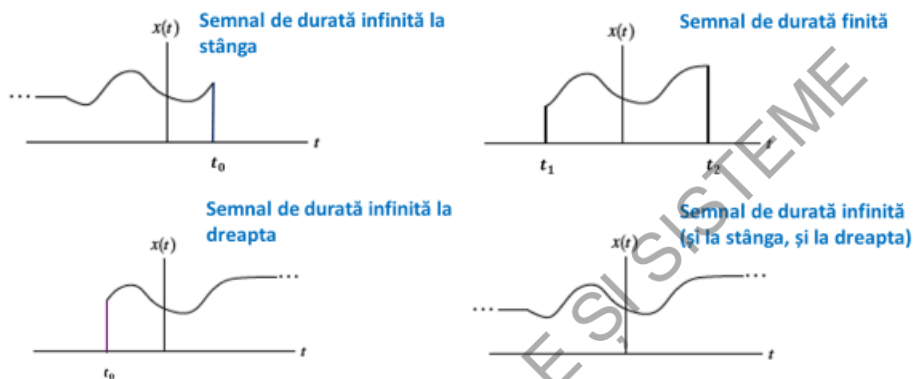


Semiplanul stâng este dat de mulțimea tuturor punctelor din planul complex care satisfac relația  $\text{Re}\{s\} < a$ , unde  $a$  este o constantă reală oarecare, negativă sau pozitivă.

Semiplanul drept este dat de mulțimea tuturor punctelor din planul complex care satisfac relația  $\text{Re}\{s\} > a$ , unde  $a$  este o constantă reală oarecare, negativă sau pozitivă.

Intersecția a două mulțimi de puncte din planul complex se definește ca fiind mulțimea acelor puncte care se află și într-o mulțime și în cealaltă.

## Clasificarea după durată a semnalelor



MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

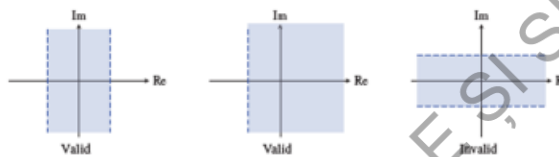
17

Dăm în figură o clasificare după durată a semnalelor definite în timp continuu.

## Proprietăți ale RC – Proprietatea 1

RC a transformatei Laplace  $X$  constă din benzi duse paralel la axa imaginară din planul complex.

Aceasta înseamnă că dacă  $s$  este în RC, atunci și  $s + j\omega$  este în RC pentru oricare ar fi  $\omega$  real.



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

18

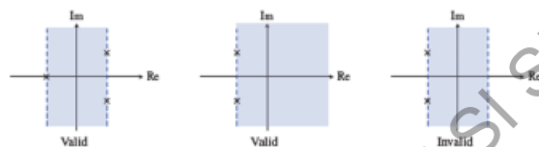
Vom evidenția, în cele ce urmează, o serie de proprietăți ale RC, fără a insista pe demonstrarea lor.

O primă proprietate este cea dată mai sus.

Dăm exemple de mulțimi, valide sau nevalide, în sensul respectării acestei proprietăți.

## Proprietăți ale RC – Proprietatea 2

Dacă transformata Laplace  $X$  este o funcție rațională (adică un raport de două polinoame), RC nu poate conține poli (adică rădăcini ale numitorului raportului, pentru care transformata ar deveni infinită), iar RC este fie delimitată de poli, fie se întinde până la infinit.

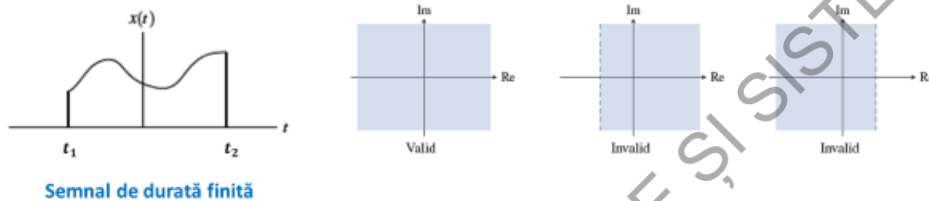


Cea de-a doua proprietate are conținutul din slide.

Dăm exemple de mulțimi, valide sau nevalide, în sensul respectării acestei proprietăți.

## Proprietăți ale RC – Proprietatea 3

Dacă un semnal în timp continuu (o funcție)  $x$  este de durată finită și transformarea sa Laplace  $X$  converge pentru o anumită valoare a lui  $s$ , atunci  $X$  converge pentru toate valorile lui  $s$  (adică RC este întregul plan complex).



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

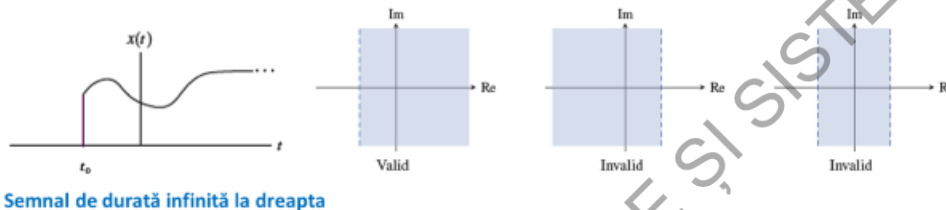
20

Dacă un semnal în timp continuu (o funcție)  $x$  este de durată finită și transformarea sa Laplace  $X$  converge pentru o anumită valoare a lui  $s$ , atunci  $X$  converge pentru toate valorile lui  $s$  (adică RC este întregul plan complex).

Câteva exemple de mulțimi care pot fi valide sau nevalide ca RC pentru  $X$ , dacă  $x$  este de durată finită, sunt prezentate în figură.

## Proprietăți ale RC – Proprietatea 4

Dacă un semnal definit în timp continuu (o funcție)  $x$  este de durată infinită la dreapta și linia (verticală)  $Re(s) = \sigma_0$  este în RC a transformării Laplace  $X$  a lui  $x$ , atunci toate valorile lui  $s$  pentru care  $Re(s) > \sigma_0$  sunt, de asemenea, în RC (respectiv RC include întreg semiplanul drept ce conține  $Re(s) = \sigma_0$ ).

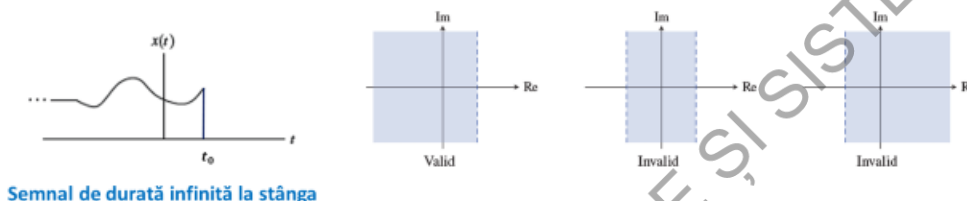


Dacă un semnal definit în timp continuu (o funcție)  $x$  este de durată infinită la dreapta și linia (verticală)  $Re(s) = \sigma_0$  este în RC a transformării Laplace  $X$  a lui  $x$ , atunci toate valorile lui  $s$  pentru care  $Re(s) > \sigma_0$  sunt, de asemenea, în RC (respectiv RC include întreg semiplanul drept ce conține  $Re(s) = \sigma_0$ ).

Câteva exemple de mulțimi care pot fi valide sau nevalide ca RC pentru  $X$ , dacă  $x$  este de durată infinită la dreapta, sunt prezentate în figură.

## Proprietăți ale RC – Proprietatea 5

Dacă un semnal definit în timp continuu (o funcție)  $x$  este de durată infinită la stânga și linia (verticală)  $Re(s) = \sigma_0$  este în RC a transformării Laplace  $X$  a lui  $x$ , atunci toate valorile lui  $s$  pentru care  $Re(s) < \sigma_0$  sunt, de asemenea, în RC (respectiv RC include întreg semiplanul stâng ce conține  $Re(s) = \sigma_0$ ).



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

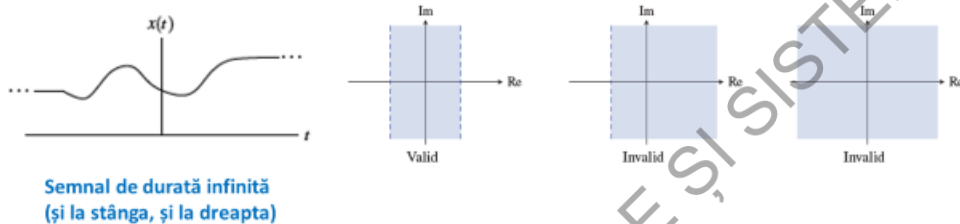
22

Dacă un semnal definit în timp continuu (o funcție)  $x$  este de durată infinită la stânga și linia (verticală)  $Re(s) = \sigma_0$  este în RC a transformării Laplace  $X$  a lui  $x$ , atunci toate valorile lui  $s$  pentru care  $Re(s) < \sigma_0$  sunt, de asemenea, în RC (respectiv RC include întreg semiplanul stâng ce conține  $Re(s) = \sigma_0$ ).

Câteva exemple de mulțimi care pot fi valide sau nevalide ca RC pentru  $X$ , dacă  $x$  este de durată infinită la stânga, sunt prezentate în figură.

## Proprietăți ale RC – Proprietatea 6

Dacă un semnal în timp continuu (o funcție)  $x$  este de durată infinită (și la stânga, și la dreapta) și linia (verticală)  $Re(s) = \sigma_0$  este în RC a transformării Laplace  $X$  a lui  $x$ , atunci RC va consta dintr-o bandă care include această linie  $Re(s) = \sigma_0$ .



Dacă un semnal în timp continuu (o funcție)  $x$  este de durată infinită (și la stânga, și la dreapta) și linia (verticală)  $Re(s) = \sigma_0$  este în RC a transformării Laplace  $X$  a lui  $x$ , atunci RC va consta dintr-o bandă verticală care include această linie  $Re(s) = \sigma_0$ .

Câteva exemple de mulțimi care pot fi valide sau nevalide ca RC pentru  $X$ , dacă  $x$  este de durată infinită (și la stânga, și la dreapta), sunt prezentate în figură.

## Proprietăți ale RC – Proprietatea 7

Dacă transformata Laplace  $X$  a semnalului definit în timp continuu (a funcției)  $x$  este una rațională, atunci:

- (a) Dacă  $x$  este de durată infinită la dreapta, atunci RC a lui  $X$  este la dreapta polului cel mai din dreapta al lui  $X$  (adică, semiplanul drept din dreapta polului cel mai din dreapta).
- (b) Dacă  $x$  este de durată infinită la stânga, atunci RC a lui  $X$  este la stânga polului cel mai din stânga al lui  $X$  (adică, semiplanul stâng din stânga polului cel mai din stânga).



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

24

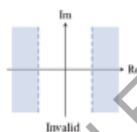
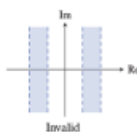
Dacă transformata Laplace  $X$  a semnalului definit în timp continuu (a funcției)  $x$  este una rațională, atunci:

- (a) Dacă  $x$  este de durată infinită la dreapta, atunci RC a lui  $X$  este la dreapta polului cel mai din dreapta al lui  $X$  (adică, semiplanul drept din dreapta polului cel mai din dreapta).
- (b) Dacă  $x$  este de durată infinită la stânga, atunci RC a lui  $X$  este la stânga polului cel mai din stânga al lui  $X$  (adică, semiplanul stâng din stânga polului cel mai din stânga).

Câteva exemple de mulțimi care pot fi valide sau valide ca RC pentru  $X$ , în cele două cazuri considerate, sunt prezentate în figură.

## Concluzii privind RC

| $X$                       |                            | RC pentru $X$                              |
|---------------------------|----------------------------|--------------------------------------------|
| Durată infinită la stânga | Durată infinită la dreapta |                                            |
| da                        | da                         | Bandă verticală (în lungul axei imaginare) |
| nu                        | da                         | Semiplan complex drept                     |
| da                        | nu                         | Semiplan complex stâng                     |
| nu                        | nu                         | Întreg planul complex                      |



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

25

În concluzie, RC poate fi doar sub forma unui semiplan complex, stâng sau drept, o bandă verticală unică, întreg planul complex sau mulțimea vidă.

Se poate demonstra că RC trebuie să fie o mulțime conexă. Vă reamintesc că o mulțime  $S$  este conexă, dacă pentru oricare două elemente  $a$  și  $b$  din  $S$ , există o cale de la  $a$  la  $b$  care este cuprinsă în  $S$ . Prin urmare RC nu poate consta din mai multe benzi verticale (pentru că ele ar fi neconectate). De exemplu, mulțimile prezentate în figură nu sunt valide ca RC.

## APLICAȚIE

Transformata Laplace  $X$  a semnalului definit în timp continuu (funcției)  $x$  are următoarea expresie analitică

$$X(s) = \frac{s + \frac{1}{2}}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + s - 2)}$$

Identificați toate RC posibile ale lui  $X$ .

Pentru fiecare RC identificat indicați dacă semnalul definit în timp continuu (funcția)  $x$  la care ar corespunde  $X$  este semnal de durată infinită la stânga, semnal de durată infinită la dreapta, semnal de durată infinită (și la stânga, și la dreapta) sau semnal de durată finită.

## REZOLVARE:

$$X(s) = \frac{s + \frac{1}{2}}{(s^2 + 2s + 2)(s^2 + s - 2)}$$

Posibilele RC asociate lui  $X$  sunt determinate strict de polii acestei transformate Laplace.

Prin urmare, se impune determinarea acestora.

Ținem cont de modul în care se factorizează o funcție de gradul al doilea:

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$

unde  $x_1$  și  $x_2$  sunt rădăcinile ecuației de gradul al doilea

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Rădăcinile ecuației

$$s^2 + 2s + 2 = 0$$

sunt  $(-1+j)$ , respectiv  $(-1-j)$  și deci,

$$s^2 + 2s + 2 = (s + 1 - j)(s + 1 + j),$$

iar rădăcinile ecuației

$$s^2 + s - 2 = 0$$

sunt  $-2$ , respectiv  $1$ , și deci

$$s^2 + s - 2 = (s + 2)(s - 1).$$

Transformata Laplace dată devine

$$X(s) = \frac{s + \frac{1}{2}}{(s + 1 - j)(s + 1 + j)(s + 2)(s - 1)}.$$

Astfel,  $X$  are poli în punctele:  $-2$ ,  $(-1-j)$ ,  $(-1+j)$  și în  $1$ .

Deoarece acești poli au doar trei părți reale distincte (și anume:  $-2$ ,  $-1$ , și  $1$ ), există patru RC-uri posibile:

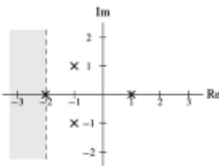
- i)  $\text{Re}(s) < -2$
- ii)  $-2 < \text{Re}(s) < -1$
- iii)  $-1 < \text{Re}(s) < 1$
- iv)  $\text{Re}(s) > 1$

Aceste RC sunt reprezentate grafic mai jos.

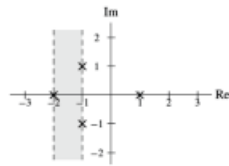
Prima RC corespunde unui semnal de durată infinită la stânga.

A doua RC corespunde la un semnal de durată infinită (și la stânga, și la dreapta) și la fel și a treia RC.

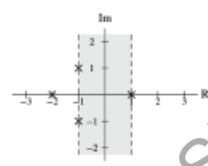
Cea de-a patra RC corespunde unui semnal de durată infinită la dreapta.



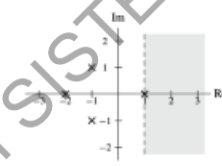
$\text{Re}(s) < -2$



$-2 < \text{Re}(s) < -1$



$-1 < \text{Re}(s) < 1$



$\text{Re}(s) > 1$

## Proprietățile TL - Liniaritatea

Dacă  $x_1(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X_1(s)$ , având RC notată cu  $R_1$ , și  $x_2(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X_2(s)$ , având RC notată cu  $R_2$ , atunci

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s),$$
având RC notată cu  $R$ , care va conține intersecția  $R_1 \cap R_2$ , constantele complexe  $a_1$  și  $a_2$  fiind arbitrar considerate.

Dacă  $x_1(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X_1(s)$ , având RC notată  $R_1$ , și  $x_2(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X_2(s)$ , având RC notată  $R_2$ , atunci

$$a_1 x_1(t) + a_2 x_2(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} a_1 X_1(s) + a_2 X_2(s),$$
având RC notată  $R$ , ce va conține intersecția  $R_1 \cap R_2$ , cu constantele complexe  $a_1$  și  $a_2$  arbitrar considerate.

Această proprietate este cunoscută sub denumirea de proprietatea de liniaritate a transformatei Laplace.

Să facem observația că RC notată  $R$  va conține întotdeauna intersecția  $R_1 \cap R_2$ , respectiv  $R_1 \cap R_2 \subset R$ .

## Proprietățile TL – Deplasarea în domeniul timp

Dacă  $x(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X(s)$ , având RC notată cu  $R$ , atunci

$$x(t - t_0) \overset{TL}{\leftrightarrow} e^{-st_0} X(s),$$

având RC tot  $R$ , unde  $t_0$  este o constantă reală arbitrară.

Dacă  $x(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X(s)$ , având RC notată cu  $R$ , atunci

$$x(t - t_0) \overset{TL}{\leftrightarrow} e^{-st_0} X(s),$$

având RC tot  $R$ , unde  $t_0$  este o constantă reală arbitrară.

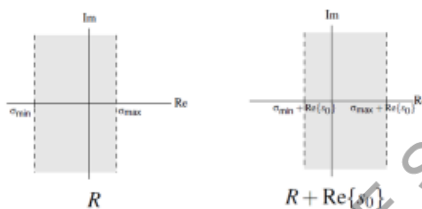
Aceasta este proprietatea de deplasare în domeniul timp a transformatei Laplace.

## Proprietățile TL – Deplasarea domeniului Laplace a TL

Dacă  $x(t) \xleftrightarrow{TL} X(s)$ , având RC notată cu  $R$ , atunci

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{TL} X(s - s_0),$$

având RC dată de  $R + \operatorname{Re}\{s_0\}$ , unde  $s_0$  este o constantă complexă arbitrară.



MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

31

Dacă  $x(t) \xleftrightarrow{TL} X(s)$ , având RC notată cu  $R$ , atunci

$$e^{s_0 t} x(t) \xleftrightarrow{TL} X(s - s_0),$$

având RC dată de  $R + \operatorname{Re}\{s_0\}$ , unde  $s_0$  este o constantă complexă arbitrară.

Aceasta este proprietatea de deplasare a domeniului Laplace în cazul transformatei Laplace.

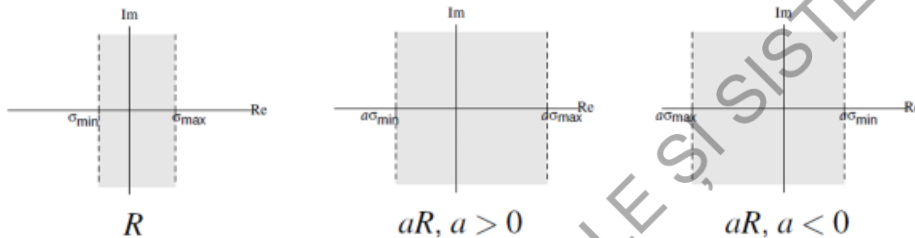
După cum este ilustrat și în figură, RC este deplasat spre dreapta cu  $\operatorname{Re}\{s_0\}$ .

## Proprietățile TL – Scalare domeniu timp /domeniu Laplace

Dacă  $x(t) \xleftrightarrow{TL} X(s)$ , având RC notată cu  $R$ , atunci

$$x(at) \xleftrightarrow{TL} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right),$$

având RC dată de  $aR$ , unde  $a$  este o constantă reală arbitrară nenulă.



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

32

Dacă  $x(t) \xleftrightarrow{TL} X(s)$ , având RC notată cu  $R$ , atunci

$$x(at) \xleftrightarrow{TL} \frac{1}{|a|} X\left(\frac{s}{a}\right),$$

având RC dată de  $aR$ , unde  $a$  este o constantă reală arbitrară nenulă.

Aceasta este proprietatea de scalare domeniu timp/domeniu Laplace în cazul transformatei Laplace.

În figură este ilustrată noua RC.

## Proprietățile TL – Proprietatea de conjugare a transformatei Laplace

Dacă  $x(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X(s)$ , având RC notată cu  $R$ , atunci  
 $x^*(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X^*(s^*)$ ,  
având RC identic cu  $R$ .

Dacă  $x(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X(s)$ , având RC notată cu  $R$ , atunci  
 $x^*(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X^*(s^*)$ ,

având RC tot  $R$ .

Această proprietate este cunoscută sub denumirea de proprietatea de conjugare a transformatei Laplace.

## Proprietățile TL – Convoluția în domeniul timp

Dacă  $x_1(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X_1(s)$ , având RC notată cu  $R_1$ , și  $x_2(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X_2(s)$ , având RC notată cu  $R_2$ , atunci

$(x_1 * x_2)(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X_1(s)X_2(s)$ ,  
având RC notată cu  $R$ , care va conține intersecția  $R_1 \cap R_2$ .

Dacă  $x_1(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X_1(s)$ , având RC notată cu  $R_1$ , și  $x_2(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X_2(s)$ , având RC notată cu  $R_2$ , atunci

$(x_1 * x_2)(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X_1(s)X_2(s)$ ,  
având RC notată cu  $R$ , care va conține intersecția  $R_1 \cap R_2$ .

Această proprietate este cunoscută ca proprietatea de convoluție în domeniul timp a transformatei Laplace.

Să facem observația că RC notată  $R$  va conține întotdeauna intersecția  $R_1 \cap R_2$ , respectiv  $R_1 \cap R_2 \subset R$ .

Convoluția din domeniul timp devine produs (multiplicare) în domeniul Laplace. Ca o consecință directă a acestei proprietăți, este mai ușor de operat cu SALIT în domeniul Laplace decât în domeniul timp.

## Proprietățile TL – Derivarea în domeniul timp

Dacă  $x(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X(s)$ , având RC notată cu  $R$ , atunci

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{TL}{\leftrightarrow} sX(s),$$

cu RC incluzând  $R$ .

Dacă  $x(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X(s)$ , având RC notată cu  $R$ , atunci

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{TL}{\leftrightarrow} sX(s),$$

cu RC incluzând  $R$ .

Această proprietate este cunoscută ca proprietatea de derivare în domeniul timp a transformatei Laplace.

Observați că derivarea în domeniul timp conduce la un simplu produs (multiplicare) cu  $s$  în domeniul Laplace, operarea fiind, astfel, mult ușurată.

Lucrul cu ecuațiile diferențiale în domeniul Laplace este mult mai simplu decât în domeniul timp.

## Proprietățile TL – Derivarea în domeniul Laplace

Dacă  $x(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X(s)$ , având RC notată cu  $R$ , atunci

$$-tx(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} \frac{dX(s)}{ds},$$

cu RC identică cu  $R$ .

Dacă  $x(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X(s)$ , având RC notată cu  $R$ , atunci

$$-tx(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} \frac{dX(s)}{ds},$$

cu RC identică cu  $R$ .

Această proprietate este cunoscută ca proprietatea de derivare în domeniul Laplace a transformatei Laplace.

## Proprietățile TL – Integrarea în domeniul timp

Dacă  $x(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X(s)$ , având RC notată cu  $R$ , atunci

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \stackrel{TL}{\leftrightarrow} \frac{1}{s} X(s),$$

cu RC incluzând  $R \cap \{Re\{s\} > 0\}$ .

Dacă  $x(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X(s)$ , având RC notată cu  $R$ , atunci

$$\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau \stackrel{TL}{\leftrightarrow} \frac{1}{s} X(s),$$

cu RC incluzând  $R \cap \{Re\{s\} > 0\}$ .

Această proprietate este cunoscută ca proprietatea de integrare în domeniul timp a transformatei Laplace.

Observați că integrarea în domeniul timp conduce la o simplă împărțire cu  $s$  în domeniul Laplace, operarea fiind, astfel, mult ușurată. Lucrul cu ecuațiile diferențiale în domeniul Laplace este mult mai facil comparativ cu cel în domeniul timp.

## Teorema valorii inițiale

Pentru o funcție  $x$  de transformată Laplace  $X$ , dacă  $x$  este cauzal și nu conține impulsuri Dirac sau singularități de ordin superior în origine, atunci

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s),$$

unde  $x(0^+)$  semnifică limita lui  $x(t)$  când  $t$  se apropie de zero prin valori pozitive ale lui  $t$ .

Pentru o funcție  $x$  de transformată Laplace  $X$ , dacă  $x$  este cauzal și nu conține impulsuri Dirac sau singularități de ordin superior în origine, atunci

$$x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s),$$

unde  $x(0^+)$  semnifică limita lui  $x(t)$  când  $t$  se apropie de zero prin valori pozitive ale lui  $t$ .

Acest rezultat este cunoscut ca teorema valorii inițiale.

## Teorema valorii finale

Pentru o funcție  $x$  de transformată Laplace  $X$ , dacă  $x$  este un semnal cauzal și are limită finită când  $t \rightarrow \infty$ , atunci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

39

Pentru o funcție  $x$  de transformată Laplace  $X$ , dacă  $x$  este un semnal cauzal și are limită finită când  $t \rightarrow \infty$ , atunci

$$\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s).$$

Acest rezultat este cunoscut sub denumirea de teorema valorii finale.

Uneori, teoremele valorii inițiale și finale sunt utile pentru a verifica eventuale erori în calculele cu transformate Laplace.

De exemplu, dacă am fi făcut o greșeală la calculul  $X(s)$ , valorile obținute din aceste teoreme ar fi, cel mai probabil, în dezacord cu valorile obținute direct din expresia originală pentru  $x(t)$ .

| Proprietatea                         | Domeniu timp                     | Domeniu Laplace                                                   | RC                                         |
|--------------------------------------|----------------------------------|-------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------|
| Liniaritate                          | $a_1x_1(t) + a_2x_2(t)$          | $a_1X_1(s) + a_2X_2(s)$                                           | $R_1 \cap R_2 \subset R$                   |
| Deplasare în domeniul timp           | $x(t - t_0)$                     | $e^{-st_0}X(s)$                                                   | $R$                                        |
| Deplasare în domeniul Laplace        | $e^{s_0t}x(t)$                   | $X(s - s_0)$                                                      | $R + \text{Re}\{s_0\}$                     |
| Scalare domeniu timp/domeniu Laplace | $x(at)$                          | $\frac{1}{ a }X\left(\frac{s}{a}\right)$                          | $aR$                                       |
| Conjugare                            | $x^*(t)$                         | $X^*(s^*)$                                                        | $R$                                        |
| Convoluție în domeniul timp          | $(x_1 * x_2)(t)$                 | $X_1(s)X_2(s)$                                                    | $R_1 \cap R_2 \subset R$                   |
| Derivare în domeniul timp            | $\frac{dx(t)}{dt}$               | $sX(s)$                                                           | $R \subset RC$                             |
| Derivare în domeniul Laplace         | $-tx(t)$                         | $\frac{dX(s)}{ds}$                                                | $R$                                        |
| Integrare în domeniul timp           | $\int_{-\infty}^t x(\tau) d\tau$ | $\frac{1}{s}X(s)$                                                 | $R \cap \{\text{Re}\{s\} > 0\} \subset RC$ |
| Teorema valorii inițiale             |                                  | $x(0^+) = \lim_{s \rightarrow \infty} sX(s)$                      |                                            |
| Teorema valorii finale               |                                  | $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s)$ |                                            |

Reunim în tabelul de mai sus toate rezultatele evidențiate anterior, pentru a le putea accesa cu ușurință atunci când avem nevoie.

**Transformate Laplace ale unor semnale uzuale definite în timp continuu**

| $x(t)$                           | $X(s)$                                  | RC                    |
|----------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------|
| $\delta(t)$                      | 1                                       | $s$                   |
| $u(t)$                           | $\frac{1}{s}$                           | $\text{Re}\{s\} > 0$  |
| $-u(-t)$                         | $\frac{1}{s}$                           | $\text{Re}\{s\} < 0$  |
| $t^n u(t)$                       | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                    | $\text{Re}\{s\} > 0$  |
| $-t^n u(-t)$                     | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                    | $\text{Re}\{s\} < 0$  |
| $e^{-at} u(t)$                   | $\frac{1}{s+a}$                         | $\text{Re}\{s\} > -a$ |
| $-e^{-at} u(-t)$                 | $\frac{1}{s+a}$                         | $\text{Re}\{s\} < -a$ |
| $t^n e^{-at} u(t)$               | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$                | $\text{Re}\{s\} > -a$ |
| $-t^n e^{-at} u(-t)$             | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$                | $\text{Re}\{s\} < -a$ |
| $[\cos \omega_0 t] u(t)$         | $\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$            | $\text{Re}\{s\} > 0$  |
| $[\sin \omega_0 t] u(t)$         | $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$     | $\text{Re}\{s\} > 0$  |
| $[e^{-at} \cos \omega_0 t] u(t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$      | $\text{Re}\{s\} > -a$ |
| $[e^{-at} \sin \omega_0 t] u(t)$ | $\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$ | $\text{Re}\{s\} > -a$ |

MARIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

41

Tabelul de mai sus conține o serie de transformate Laplace ale unor semnale definite în timp continuu, utilizate mai frecvent.

Este obligatorie specificarea RC pentru transformata Laplace, în fiecare caz. După cum se observă din tabel, există transformate Laplace care au aceeași expresie analitică, dar semnalele definite în timp continuu, la care corespund acestea, sunt diferite. Diferite sunt, în aceste cazuri, și RC-urile.

## APLICAȚIA 1

Să se determine transformata Laplace pentru  $x(t) = u(t - 1)$ .

### REZOLVARE:

Din tabelul de transformate Laplace uzuale știm că

$$u(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} \frac{1}{s}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Folosind proprietatea de deplasare în domeniul timp a transformatei Laplace vom obține:

$$x(t) = u(t - 1) \overset{TL}{\leftrightarrow} X(s) = e^{-s} \cdot \frac{1}{s}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Prin urmare:

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

| $x(t)$                           | $X(s)$                                  | nc                            |
|----------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------|
| $\delta(t)$                      | 1                                       | $s$                           |
| $u(t)$                           | $\frac{1}{s}$                           | $\operatorname{Re}\{s\} > 0$  |
| $-u(-t)$                         | $\frac{1}{s}$                           | $\operatorname{Re}\{s\} < 0$  |
| $t^n u(t)$                       | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                    | $\operatorname{Re}\{s\} > 0$  |
| $-t^n u(-t)$                     | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                    | $\operatorname{Re}\{s\} < 0$  |
| $e^{-at} u(t)$                   | $\frac{1}{s+a}$                         | $\operatorname{Re}\{s\} > -a$ |
| $-e^{-at} u(-t)$                 | $\frac{1}{s+a}$                         | $\operatorname{Re}\{s\} < -a$ |
| $t^n e^{-at} u(t)$               | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$                | $\operatorname{Re}\{s\} > -a$ |
| $-t^n e^{-at} u(-t)$             | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$                | $\operatorname{Re}\{s\} < -a$ |
| $[\cos \omega_0 t] u(t)$         | $\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$            | $\operatorname{Re}\{s\} > 0$  |
| $[\sin \omega_0 t] u(t)$         | $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$     | $\operatorname{Re}\{s\} > 0$  |
| $[e^{-at} \cos \omega_0 t] u(t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$      | $\operatorname{Re}\{s\} > -a$ |
| $[e^{-at} \sin \omega_0 t] u(t)$ | $\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$ | $\operatorname{Re}\{s\} > -a$ |

Să se determine transformata Laplace pentru

$$x(t) = u(t - 1)$$

### REZOLVARE:

Mergem la tabelul de transformate Laplace uzuale. Observăm că

$$u(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} \frac{1}{s}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Folosind proprietatea de deplasare în domeniul timp a transformatei Laplace vom obține:

$$x(t) = u(t - 1) \overset{TL}{\leftrightarrow} X(s) = e^{-s} \cdot \frac{1}{s}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Prin urmare:

$$X(s) = \frac{e^{-s}}{s}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

## APLICAȚIA 2

Să se determine transformata Laplace a convoluției semnalelor definite în timp continuu.

$$x_1(t) = \sin(3t) \cdot u(t)$$

$$x_2(t) = t \cdot u(t)$$

**REZOLVARE:**

Din tabelul de transformate Laplace uzuale avem că

$$x_1(t) = \sin(3t) \cdot u(t) \xleftrightarrow{TL} X_1(s) = \frac{3}{s^2 + 9}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$x_2(t) = t \cdot u(t) \xleftrightarrow{TL} X_2(s) = \frac{1}{s^2}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > 0$$

Utilizând proprietatea convoluției în domeniul timp a transformatei Laplace obținem

$$x(t) = (x_1 * x_2)(t) \xleftrightarrow{TL} X(s) = X_1(s) \cdot X_2(s) = \frac{3}{s^2 + 9} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{3}{s^2(s^2 + 9)},$$

$$\text{pentru } \{\operatorname{Re}(s) > 0\} \cap \{\operatorname{Re}(s) > 0\} = \{\operatorname{Re}(s) > 0\}$$

| $x(t)$                           | $X(s)$                                  | RC                          |
|----------------------------------|-----------------------------------------|-----------------------------|
| $\delta(t)$                      | 1                                       | $\operatorname{Re}(s) > 0$  |
| $u(t)$                           | $\frac{1}{s}$                           | $\operatorname{Re}(s) > 0$  |
| $-u(-t)$                         | $\frac{1}{s}$                           | $\operatorname{Re}(s) < 0$  |
| $t^n u(t)$                       | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                    | $\operatorname{Re}(s) > 0$  |
| $-t^n u(-t)$                     | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                    | $\operatorname{Re}(s) < 0$  |
| $e^{-at} u(t)$                   | $\frac{1}{s+a}$                         | $\operatorname{Re}(s) > -a$ |
| $-e^{-at} u(-t)$                 | $\frac{1}{s+a}$                         | $\operatorname{Re}(s) < -a$ |
| $t^n e^{-at} u(t)$               | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$                | $\operatorname{Re}(s) > -a$ |
| $-t^n e^{-at} u(-t)$             | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$                | $\operatorname{Re}(s) < -a$ |
| $[\cos \omega_0 t] u(t)$         | $\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$            | $\operatorname{Re}(s) > 0$  |
| $[\sin \omega_0 t] u(t)$         | $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$     | $\operatorname{Re}(s) > 0$  |
| $[e^{-at} \cos \omega_0 t] u(t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$      | $\operatorname{Re}(s) > -a$ |
| $[e^{-at} \sin \omega_0 t] u(t)$ | $\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$ | $\operatorname{Re}(s) > -a$ |

Să se determine transformata Laplace a convoluției semnalelor definite în timp continuu

$$x_1(t) = \sin(3t) \cdot u(t)$$

$$x_2(t) = t \cdot u(t)$$

**REZOLVARE:**

Din tabelul de transformate Laplace uzuale avem că

$$x_1(t) = \sin(3t) \cdot u(t) \xleftrightarrow{TL} X_1(s) = \frac{3}{s^2 + 9}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > 0$$

$$x_2(t) = t \cdot u(t) \xleftrightarrow{TL} X_2(s) = \frac{1}{s^2}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > 0$$

Utilizând proprietatea convoluției în domeniul timp a transformatei Laplace obținem

$$x(t) = (x_1 * x_2)(t) \xleftrightarrow{TL} X(s) = X_1(s) \cdot X_2(s) = \frac{3}{s^2 + 9} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{3}{s^2(s^2 + 9)},$$

$$\text{pentru } \{\operatorname{Re}(s) > 0\} \cap \{\operatorname{Re}(s) > 0\} = \{\operatorname{Re}(s) > 0\}$$

## APLICAȚIA 3

Să se determine transformata Laplace pentru

$$x(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}.$$

### REZOLVARE:

Din tabelul de transformate Laplace uzuale avem că

$$\delta(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} 1, \text{ pentru orice } s.$$

Folosind proprietatea de derivare în domeniul timp a transformatei Laplace vom obține:

$$x(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X(s) = s \cdot 1, \text{ pentru orice } s.$$

Prin urmare:

$$X(s) = s, \text{ pentru orice } s.$$

| $x(t)$                           | $X(s)$                                  | RC                            |
|----------------------------------|-----------------------------------------|-------------------------------|
| $\delta(t)$                      | 1                                       | $s$                           |
| $u(t)$                           | $\frac{1}{s}$                           | $\operatorname{Re}\{s\} > 0$  |
| $-u(-t)$                         | $\frac{1}{s}$                           | $\operatorname{Re}\{s\} < 0$  |
| $t^n u(t)$                       | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                    | $\operatorname{Re}\{s\} > 0$  |
| $-t^n u(-t)$                     | $\frac{n!}{s^{n+1}}$                    | $\operatorname{Re}\{s\} < 0$  |
| $e^{-at} u(t)$                   | $\frac{1}{s+a}$                         | $\operatorname{Re}\{s\} > -a$ |
| $-e^{-at} u(-t)$                 | $\frac{1}{s+a}$                         | $\operatorname{Re}\{s\} < -a$ |
| $t^n e^{-at} u(t)$               | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$                | $\operatorname{Re}\{s\} > -a$ |
| $-t^n e^{-at} u(-t)$             | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$                | $\operatorname{Re}\{s\} < -a$ |
| $[\cos \omega_0 t] u(t)$         | $\frac{s}{s^2 + \omega_0^2}$            | $\operatorname{Re}\{s\} > 0$  |
| $[\sin \omega_0 t] u(t)$         | $\frac{\omega_0}{s^2 + \omega_0^2}$     | $\operatorname{Re}\{s\} > 0$  |
| $[e^{-at} \cos \omega_0 t] u(t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$      | $\operatorname{Re}\{s\} > -a$ |
| $[e^{-at} \sin \omega_0 t] u(t)$ | $\frac{\omega_0}{(s+a)^2 + \omega_0^2}$ | $\operatorname{Re}\{s\} > -a$ |

Să se determine transformata Laplace pentru

$$x(t) = \frac{d\delta(t)}{dt}.$$

### REZOLVARE:

Din tabelul de transformate Laplace uzuale avem că

$$\delta(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} 1, \text{ pentru orice } s.$$

Folosind proprietatea de derivare în domeniul timp a transformatei Laplace vom obține:

$$x(t) = \frac{d\delta(t)}{dt} \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X(s) = s \cdot 1, \text{ pentru orice } s.$$

Prin urmare:

$$X(s) = s, \text{ pentru orice } s.$$

## APLICAȚIA 4

Ținând cont de faptul că

$$e^{-2t}u(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > -2,$$

determinați transformata Laplace  $X$  a funcției

$$x(t) = te^{-2t}u(t).$$

### REZOLVARE:

Folosind proprietatea de derivare în domeniul Laplace, obținem

$$x(t) = te^{-2t}u(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right), \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > -2.$$

Vom obține:

$$X(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right) = -\frac{d}{ds}(s+2)^{-1} = (-1)(-1)(s+2)^{-2} = \frac{1}{(s+2)^2}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > -2.$$

Ținând cont de faptul că

$$e^{-2t}u(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} \frac{1}{s+2}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > -2,$$

determinați transformata Laplace  $X$  a funcției

$$x(t) = te^{-2t}u(t).$$

### REZOLVARE:

Folosind proprietatea de derivare în domeniul Laplace și cea de liniaritate, obținem

$$x(t) = te^{-2t}u(t) \overset{TL}{\leftrightarrow} X(s) = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right), \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > -2.$$

Vom obține:

$$\begin{aligned} X(s) &= -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s+2}\right) = -\frac{d}{ds}(s+2)^{-1} = (-1)(-1)(s+2)^{-2} \\ &= \frac{1}{(s+2)^2}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > -2. \end{aligned}$$

## APLICAȚIA 5

Să se determine transformata Laplace  $X$  pentru

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{-2\tau} \sin(\tau) u(\tau) d\tau.$$

### REZOLVARE:

Din tabelul de transformate Laplace uzuale avem că

$$e^{-2t} \sin(t) u(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} \frac{1}{(s+2)^2+1}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > -2.$$

Folosind proprietatea integrării în domeniul timp pentru transformata Laplace, vom deduce că

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{-2\tau} \sin(\tau) u(\tau) d\tau \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X(s) = \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+2)^2+1}, \text{ pentru } \{ \operatorname{Re}(s) > -2 \} \cap \{ \operatorname{Re}(s) > 0 \}.$$

Prin urmare

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+4s+5)}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

| $x(t)$                         | $X(s)$                            | RC                          |
|--------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------|
| $\delta(t)$                    | 1                                 | $s$                         |
| $u(t)$                         | $\frac{1}{s}$                     | $\operatorname{Re}(s) > 0$  |
| $-u(-t)$                       | $\frac{1}{s}$                     | $\operatorname{Re}(s) < 0$  |
| $t^n u(t)$                     | $\frac{n!}{s^{n+1}}$              | $\operatorname{Re}(s) > 0$  |
| $-t^n u(-t)$                   | $\frac{n!}{s^{n+1}}$              | $\operatorname{Re}(s) < 0$  |
| $e^{-at} u(t)$                 | $\frac{1}{s+a}$                   | $\operatorname{Re}(s) > -a$ |
| $-e^{-at} u(-t)$               | $\frac{1}{s+a}$                   | $\operatorname{Re}(s) < -a$ |
| $t^n e^{-at} u(t)$             | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$          | $\operatorname{Re}(s) > -a$ |
| $-t^n e^{-at} u(-t)$           | $\frac{n!}{(s+a)^{n+1}}$          | $\operatorname{Re}(s) < -a$ |
| $[\cos \omega t] u(t)$         | $\frac{s}{s^2+\omega^2}$          | $\operatorname{Re}(s) > 0$  |
| $[\sin \omega t] u(t)$         | $\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$     | $\operatorname{Re}(s) > 0$  |
| $[e^{-at} \cos \omega t] u(t)$ | $\frac{s+a}{(s+a)^2+\omega^2}$    | $\operatorname{Re}(s) > -a$ |
| $[e^{-at} \sin \omega t] u(t)$ | $\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$ | $\operatorname{Re}(s) > -a$ |

Să se determine transformata Laplace  $X$  pentru

$$x(t) = \int_{-\infty}^t e^{-2\tau} \sin(\tau) u(\tau) d\tau.$$

### REZOLVARE:

Din tabelul de transformate Laplace uzuale avem că

$$e^{-2t} \sin(t) u(t) \stackrel{TL}{\leftrightarrow} \frac{1}{(s+2)^2+1}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > -2.$$

Folosind proprietatea integrării în domeniul timp pentru transformata Laplace, vom deduce că

$$\begin{aligned} x(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-2\tau} \sin(\tau) u(\tau) d\tau \stackrel{TL}{\leftrightarrow} X(s) \\ &= \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(s+2)^2+1}, \text{ pentru } \{ \operatorname{Re}(s) > -2 \} \cap \{ \operatorname{Re}(s) > 0 \}. \end{aligned}$$

Prin urmare

$$X(s) = \frac{1}{s(s^2+4s+5)}, \text{ pentru } \operatorname{Re}(s) > 0.$$

Everything will be ok  
in the end.  
If it's not ok,  
it's not the end.