

CURSUL 10

Eșantionarea și interpolarea semnalelor.

Aliasing.

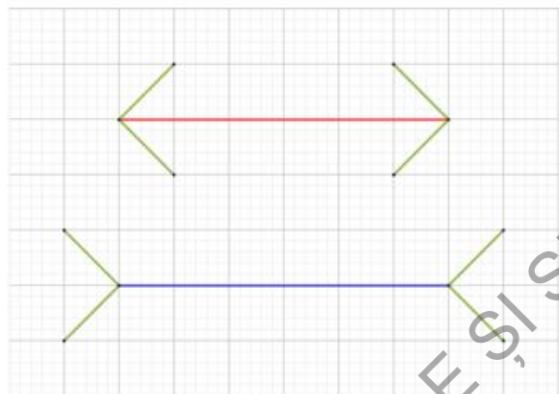
Modelări matematice ale proceselor de eșantionare și interpolare.

Teorema eșantionării.

Exemple.

Acestea sunt noutățile pe care le vom afla în cele ce urmează. Dar, pentru început, vreau să vă învioresc puțin...

Care linie este mai lungă?



Răspundeți cu sinceritate. Care linie apreciați că este mai lungă? Cea roșie sau cea albastră?

Pentru fiecare dintre noi, pare că cea albastră este mai lungă...

RĂSPUNS: Atunci când adăugăm grila ne convingem, însă, că liniile au exact aceeași lungime. În ciuda adevărului dovedit, prima impresie încă rămâne dacă renunțăm din nou la grilă... Sau chiar și cu grila, senzația se păstrează.

Calculăm probabilități

La o maternitate șase mame au născut pe parcursul a 24 de ore șase copii (fete F și/sau băieți B).

Care dintre următoarele variante credeți că este cea mai probabilă cu privire la succesiunea nașterilor?

BFBBFB

BBBFFF

FFFFFF

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

3

Mulți dintre voi vor răspunde că prima variantă, BFBBFB, este cea mai probabilă, deoarece ne așteptăm ca „regularitățile” de tipul BBB, FFF sau FFFFFFF, să nu apară în procesele întâmplătoare (aleatorii). Atunci când apar regularități ne gândim imediat la ceva ce nu poate fi accidental și respingem ideea că procesul este unul pur întâmplător. Spre exemplu, în sinea noastră noi credem că după un B este mai probabil să vină o F, și nu un alt B. Cu atât mai mult, după doi B, suntem aproape siguri că trebuie să vină o F.

Noi, oamenii, vedem modele și acolo unde nu există, de fapt, niciunul. Gândim cu preponderență causal, legând ceea ce se întâmplă acum de ce s-a întâmplat înainte, chiar și atunci când nu există legătură între evenimente (adică nu există cauzalitate).

Să analizăm lucrurile cu mai mare atenție.

Fiecare naștere este un eveniment total independent de celelalte nașteri.

Fiecare dintre variantele B sau F sunt la fel de probabile matematic.

CONCLUZIA: Cele trei variante sunt la fel de probabile.

Calcul matematic rapid

O bătă de baseball și o minge costă împreună 110 dolari.

Băta costă cu 100 de dolari mai mult decât mingea.

Cât costă mingea?

$$B+M=110$$

$$B=M+100$$

$$B = 105$$

$$M = 5$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

4

Scrieți rapid răspunsul pe hârtie fără să vă uitați la ceilalți. Ați scris 10?

Cine a scris 5?

Concluzia pe care o tragem, după ce am abordat cele trei probleme diferite:

Mult prea des ne luăm după „fentă”, acționând insinctiv.

Gândire rapidă, gândire lentă



Când primim un **SEMNAL** important, nu trebuie să acționăm numai în baza a ce dictează instant **SISTEMUL 1**, ci punem la lucru și **SISTEMUL 2**, chiar dacă asta poate presupune un efort crescut din partea noastră.

MARTIN BANCOS - SEMNALE SI SISTEME

5

Exemplele alese nu-mi aparțin. Le-am luat dintr-o carte. Titlul din slide este și titlul cărții, scrise de Daniel Kahneman, cel care a fost un renumit psiholog, profesor la Universitatea Princeton și laureat al premiului Nobel pentru economie în anul 2002.

El a identificat în gândirea noastră acțiunea și coexistența a două sisteme:

- **Sistemul 1:** cel responsabil de gândirea rapidă, sistem care operează automat, foarte rapid, cu efort redus sau chiar nul, fără a ne oferi senzația de control voluntar; acesta este cel care stă la originea impresiilor și senzațiilor noastre;
- **Sistemul 2:** cel asociat cu gândirea lentă, sistem care acordă atenția necesară activităților mintale solicitante, printre care se numără și calculele complicate; operațiile derulate de acest sistem se asociază cu alegerea (selecția) și cu concentrarea.

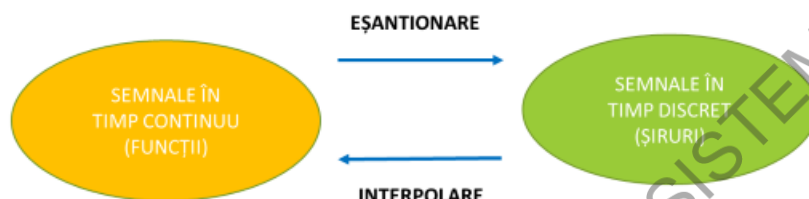
Atunci când suntem puși în fața unor alegeri importante nu trebuie să acționăm instinctiv, lăsând numai Sistemul 1 să-și spună cuvântul, învăluindu-ne în impresii și senzații. Este important să facem efortul de analiză rațională, apelând la toate resursele Sistemului 2, mai multe sau mai puține, funcție de individ și de bagajul de cunoștințe pe care acesta îl posedă.

Așadar, de fiecare dată când primim un SEMNAL important, este de dorit să nu acționăm numai în baza a ce dictează instant SISTEMUL 1, ci punem la lucru și SISTEMUL 2, chiar dacă asta presupune un efort consistent din partea noastră.

Acestea fiind spuse, haideți să intrăm în subiectele pe care ne-am propus să le abordăm azi.

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

EȘANTIONARE ȘI INTERPOLARE



MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

6

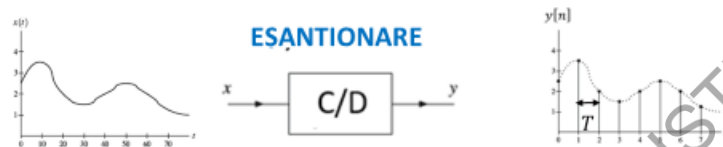
Adesea întâlnim situații în care trebuie să procesăm un semnal definit în timp continuu în domeniul timpului discret sau invers.

Spre exemplu, putem avea un semnal audio în timp continuu pe care dorim să-l procesăm folosind un computer (care este un sistem în timp discret). Sau putem avea un semnal audio definit în timp discret pe care dorim să-l redăm printr-un difuzor (care este un sistem în timp continuu).

În mod clar, în acest sens ne sunt necesare proceduri adecvate pentru stabilirea unor punți între domeniul timpului continuu și cel al timpului discret. Ele sunt stabilite prin operațiunile desfășurate în procesele de *eșantionare* și *interpolare*.

Despre *eșantionare* am mai discutat și știm, în principiu, în ce constă. În ceea ce urmează, vom clarifica ambele noțiuni și le vom studia mai detaliat.

Eșantionarea – conversie din timp continuu în timp discret



funcție $x(t) \Rightarrow$ șir $y[n] = x(T \cdot n), n \in \mathbb{Z}$
 T - perioadă de eșantionare
 $\omega_S = 2\pi/T$ - pulsație (frecvență) de eșantionare

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

7

Eșantionarea ne permite să creăm dintr-un semnal în timp continuu (adică, dintr-o funcție) un semnal în timp discret (adică un șir de valori).

Deși eșantionarea poate fi efectuată în multiple moduri, schema cel mai frecvent utilizată este cea a *eșantionării periodice*. Cu această schemă, se obține dintr-o funcție $x(t)$ un șir $y[n]$ de eșantioane, prin

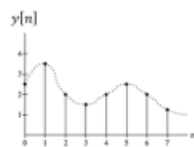
$$y[n] = x(T \cdot n), \quad n \in \mathbb{Z},$$

unde T este o constantă reală pozitivă.

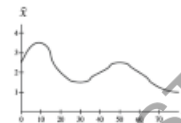
T este denumită *perioadă de eșantionare* și $\omega_S = 2\pi/T$ este denumită *pulsație (frecvență de eșantionare)*.

Un sistem precum cel descris este denumit *convertor din timp continuu în timp discret (C/D)* și se reprezintă ca în figură.

Interpolarea – conversie din timp discret în timp continuu



INTERPOLARE



$$\hat{x} = \mathcal{H}y \quad \hat{x}(T \cdot n) = y[n], n \in \mathbb{Z}$$

T - perioadă de eșantionare

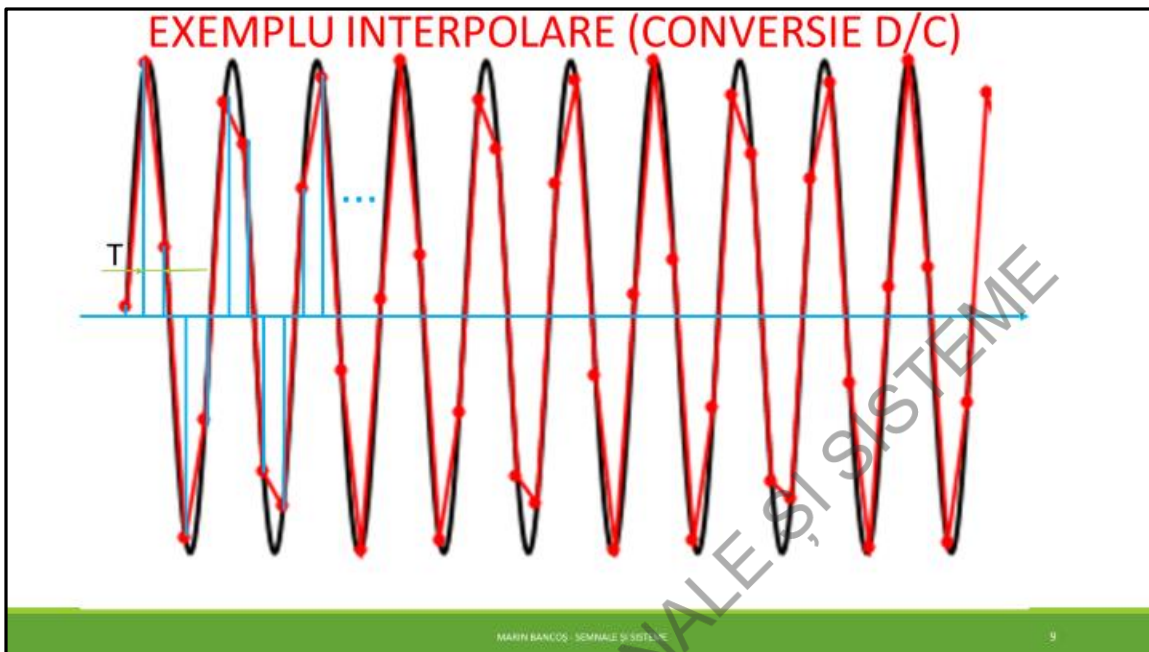
MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

8

Interpolarea ne permite să construim un semnal în timp continuu (adică o funcție) dintr-un semnal în timp discret (adică dintr-un șir). De fapt, având un șir dat, procesul de interpolare produce o funcție care, prin eșantionare, ne-ar furniza exact șirul dat, aceasta în condițiile unor constrângeri suplimentare impuse.

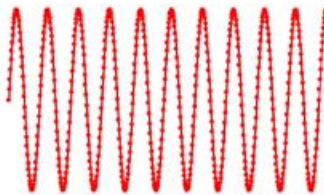
Mai formal, pentru un șir dat, $y[n]$, asociat cu o perioadă de eșantionare T , interpolarea produce o funcție $\hat{x}$, dată de $\hat{x} = \mathcal{H}y$, sub rezerva constrângerii că $\hat{x}(T \cdot n) = y[n]$, $n \in \mathbb{Z}$, unde $\mathcal{H}$ este un operator (transformare) care mapează un șir la o funcție.

Forma precisă a lui $\mathcal{H}$ depinde de schema de interpolare utilizată. Interpolarea este efectuată de un sistem denumit *convertor din timp discret în timp continuu*, simbolizat ca în slide.



Haideți să luăm un exemplu. Vrem să interpolăm semnalul în timp discret, obținut prin eșantionarea unui semnal sinusoidal. Realizăm această interpolare simplist, prin unirea punctelor corespunzătoare eșantioanelor. la semnalul inițial.

Recuperarea prin conversie D/C în cazul unui semnal sinusoidal



https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Aliasing_sinusoidal.gif

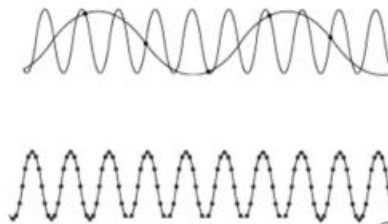
MARIN BANCOȘ - SEMNALE SI SISTEME

10

Aici reconstrucția s-a făcut, după cum se observă, prin simpla unire a punctelor de eșantionare și nu cu ajutorul sinusului atenuat.

ALIASING = Același semnal în timp discret provenit prin eșantionare din semnale diferite în timp continuu

Exemplul 1



MARTIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

11

În absența oricăror condiții impuse procesului de eșantionare, o funcție, adică un semnal în timp continuu, nu poate fi determinată în mod unic din șirul eșantioanelor sale, egal distanțate, adică din semnalul în timp discret. Cu alte cuvinte, procesul de eșantionare nu este, în general vorbind, unul inversabil.

Exemplul 1

Înțelegem de aici că în cazul unei eșantionări inadecvate, se pot face „confuzii” în reconstituirea semnalului în timp continuu.

Dacă perioada de eșantionare este, însă, suficient de mică, observăm din figură că nu prea mai este „loc de întors”...

Toate aceste lucruri ne sunt cunoscute, deoarece aparțin fenomenului denumit „aliasing”, despre care deja am discutat.

ALIASING = Același semnal în timp discret provenit prin eșantionare din semnale diferite în timp continuu

Exemplul 2

$$x_1(t) = 0$$
$$x_2(t) = \sin(2\pi t)$$

Eșantionare

$$T = 1$$

$$y_1[n] = x_1(T \cdot n) = x_1(n) = 0$$
$$y_2[n] = x_2(T \cdot n) = x_2(2\pi n) = 0$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

12

Exemplul 2

Considerăm, de exemplu, semnalele în timp continuu date prin funcțiile x_1 și x_2 definite astfel:

$$x_1(t) = 0 \text{ și } x_2(t) = \sin(2\pi t).$$

Dacă eșantionăm fiecare dintre aceste funcții cu perioada de eșantionare $T = 1$, vom obține semnalele în timp discret date prin șirurile

$$y_1[n] = x_1(T \cdot n) = x_1(n) = 0 \text{ și } y_2[n] = x_2(T \cdot n) = x_2(2\pi n) = 0.$$

Așadar avem semnale definite în timp discret identice, $y_1 = y_2$, obținute prin eșantionarea a două semnale total diferite, definite în timp continuu, $x_1 \neq x_2$.

Și acest exemplu arată în mod simplist că, dacă nu sunt impuse niciun fel de condiții asupra perioadei eșantionării unui semnal în timp continuu, atunci semnalul nu poate fi determinat în mod unic din eșantioanele sale.

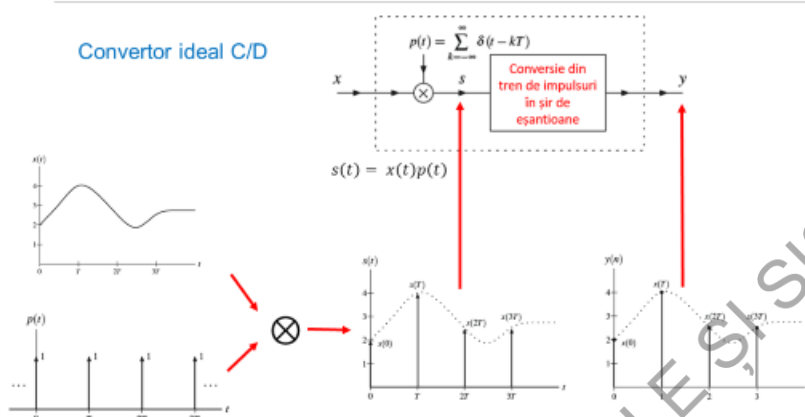
Din fericire, în anumite circumstanțe, un semnal în timp continuu poate fi recuperat în mod exact din eșantioanele sale.

În special în cazul în care semnalul eșantionat este unul de bandă limitată, se poate demonstra că un șir al eșantioanelor sale, egal distanțate, determină în mod unic semnalul, asta dacă perioada de eșantionare este suficient de mică.

Acest rezultat, cunoscut sub numele de *teorema eșantionării*, este unul de mare importanță și ne vom ocupa de el puțin mai încolo. Oare cât de mică trebuie să fie perioada de eșantionare?

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

Modelarea matematică a procesului de eșantionare



Să încercăm acum să modelăm matematic procesul de eșantionare a unui semnal oarecare definit în timp continuu.

Pentru aceasta folosim modelul simplu de convertor ideal C/D prezentat în figură.

Pe scurt, putem vedea procesul de eșantionare ca o modulare a unui tren de impulsuri Dirac-delta, urmată de conversia într-un semnal definit în timp discret (adică într-un șir de valori de eșantioane ale semnalului).

Mai precis, pentru a eșantiona funcția x cu o perioadă de eșantionare T , înmulțim mai întâi x cu trenul de impulsuri periodice p și obținem

$$s(t) = x(t)p(t),$$

unde

$$p(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(t - kT).$$

Frecvența de eșantionare este dată de $\omega_s = 2\pi/T$. Ca terminologie, p este denumită *funcție de eșantionare*.

Pe ieșirea convertorului ideal C/D se obține șirul y de eșantioane, adică

semnalul definit în timp discret dorit.

Din reprezentarea grafică putem vedea că semnalele s și y , deși foarte asemănătoare, sunt totuși diferite. Astfel, trenul de impulsuri este o funcție (adică, un semnal definit în timp continuu) care este de valoare zero peste tot, cu excepția multiplilor întregi ai lui T (adică în punctele de eșantionare), în timp ce y este un șir (adică un semnal definit în timp discret), definit numai în coordonate numere întregi. Diferitele semnale implicate în eșantionare sunt ilustrate în slide.

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

Rezultatele în domeniul frecvență

$$x, y, p, s \overset{TF}{\leftrightarrow} X, Y, P, S$$

$$p \text{ este } T\text{-periodic} \overset{SFE}{\Rightarrow} p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{-jn\omega_s t}.$$

$$A_{nc} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} = \frac{\omega_s}{2\pi}$$

$$s(t) = x(t) \cdot p(t) \Rightarrow s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_s}{2\pi} \cdot e^{-jn\omega_s t} = \frac{\omega_s}{2\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-jn\omega_s t}$$

$$\text{În domeniul frecvență obținem: } S(\omega) = \frac{\omega_s}{2\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s) \Leftrightarrow S(f) = f_s \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s).$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

14

Modelul ne oferă o modalitate relativ simplă de a studia descrierea matematică a eșantionării. El, însă, nu este direct util pentru realizarea efectivă a eșantionării în lumea reală, deoarece trenul de impulsuri folosit pune probleme de netrecut în ceea ce privește implementarea fizică.

Să luăm acum în considerare modelul de eșantionare de mai sus și să găsim relația dintre spectrele de frecvență ale semnalului original definit în timp continuu, x , și versiunea eșantionată a trenului de impulsuri, s .

În cele ce urmează, fie X , Y , P și S transformatele Fourier ale lui x, y, p și, respectiv, s .

Deoarece p este T -periodic, el poate fi reprezentat în termenii unei serii Fourier ca fiind

$$p(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_{nc} e^{-jn\omega_s t}.$$

Coeficienții SFE se calculează folosind formula cunoscută

$$A_{nc} = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} p(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) e^{-jn\omega_s t} dt = \frac{1}{T} = \frac{\omega_s}{2\pi}.$$

Cum $s(t) = x(t) \cdot p(t)$, făcând înlocuirile, obținem că

$$s(t) = x(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\omega_s}{2\pi} \cdot e^{-jn\omega_s t} = \frac{\omega_s}{2\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t) \cdot e^{-jn\omega_s t}.$$

Considerând acum transformatele Fourier ale semnalelor care intervin și ținând cont de proprietățile transformatei Fourier obținem

$$S(\omega) = \frac{\omega_s}{2\pi} \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(\omega - n\omega_s).$$

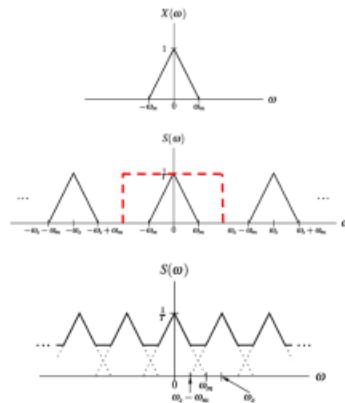
Așadar transformata Fourier a lui $s(t)$, adică spectrul acestuia notat cu $S(\omega)$, este o sumă scalată a unui număr infinit de copii deplasate ale spectrului $X(\omega)$ al funcției originale $x(t)$. Avem de a face cu o deplasare în jurul multiplilor lui ω_s și o ponderare cu $\frac{1}{T} = \frac{\omega_s}{2\pi}$.

De asemenea, putem scrie funcție de frecvență că:

$$S(f) = f_s \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f - nf_s).$$

Altfel spus, prin eșantionare spectrul (bilateral) al semnalului analogic supus acestei operații este deplasat în jurul multiplilor lui f_s și este ponderat cu f_s .

Reprezentări în domeniul frecvență



Spectrul semnalului x
(de bandă limitată)

Spectrul semnalului s , fără aliasing

$$\omega_s > 2\omega_m$$

Spectrul semnalului s , cu aliasing

$$\omega_s \leq 2\omega_m$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

15

Vom ilustra, acum, comportamentul procesului de eșantionare în domeniul frecvență. Să presupunem că avem un semnal definit în timp continuu, adică o funcție x , cu transformata Fourier X , unde

$|X(\omega)| = 0$, pentru $|\omega| > \omega_m$ (cu alte cuvinte x este de bandă limitată).

Pentru a simplifica procesul de vizualizare, vom presupune că X are forma particulară prezentată în figură.

În cele ce urmează ne bazăm doar pe banda limitată a lui x și nu pe modul cum este el efectiv definit, astfel încât rezultatele pe care le obținem se vor aplica în general oricărui astfel de semnal de bandă limitată.

Cum am demonstrat că S este format prin suprapunerea unui număr infinit de copii deplasate ale lui X , pot apărea două situații distincte privind porțiunile diferite de zero ale copiilor deplasate ale lui X , utilizate pentru a-l forma pe S . Astfel, acestea fie nu se vor suprapune (nu există aliasing),

fie se vor suprapune (există aliasing), situațiile fiind cele reprezentate grafic.

Din aceste grafice, putem vedea că porțiunile diferite de zero ale copiilor deplasate ale lui X nu se vor suprapune numai dacă

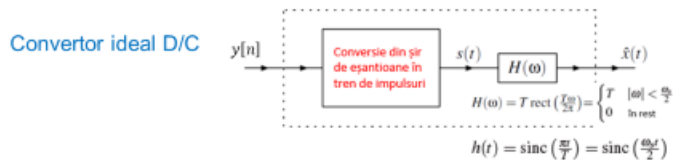
$$\omega_m < \omega_s - \omega_m \text{ și } -\omega_m > -\omega_s + \omega_m \text{ sau echivalent } \omega_s > 2\omega_m$$

Luăm în considerare cazul în care copiile spectrului original X nu se suprapun în reprezentarea lui S . În această situație, spectrul X al funcției originale este clar perceptibil în spectrul S . De fapt, se poate vedea că spectrul original X poate fi obținut direct din S printr-o operație de filtrare trece-jos. Prin urmare, în aceste condiții, funcția x poate fi recuperată exact din s .

Acum, luați în considerare cazul în care copiile spectrului original X în S se suprapun. În această situație, multiple frecvențe din spectrul X al funcției originale sunt mapate la aceeași frecvență în S . Aceasta corespunde fenomenului denumit aliasing. Când apare aliasing, forma spectrului original X nu se mai poate discerne în S . În aceste condiții nu se mai poate reconstitui semnalul original x din s .

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

Modelarea matematică a procesului de interpolare



$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \delta(t - Tn)$$

$$\begin{aligned} \hat{x}(t) &= (s * h)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \delta(\tau - Tn) d\tau = \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \int_{-\infty}^{\infty} h(t - \tau) \delta(\tau - Tn) d\tau = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] h(t - Tn) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \text{sinc}\left[\frac{\pi}{T}\left(t - Tn\right)\right] \end{aligned}$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ŞI SISTEME

16

Interpolarea ne permite să facem drumul invers eşantionării şi să construim o funcţie (adică, un semnal definit în timp continuu) dintr-un şir (adică, dintr-un semnal definit în timp discret). Acest proces este în esenţă responsabil pentru stabilirea valorilor funcţiei între punctele corespunzătoare eşantioanelor. În general nu este posibil să se reproducă exact o funcţie din eşantioanele sale. Interpolarea va fi modelată folosind modelul simplu de convertor ideal D/C prezentat în figură. Acest tip special de interpolare este cunoscut ca interpolare cu bandă limitată.

Să ne reamintim convertorul ideal C/D folosit anterior. Deoarece procesul de conversie a unui tren de impulsuri y într-un şir s este inversabil, vom putea reconstrui funcţia originală x din şirul y al eşantioanelor funcţiei x numai dacă-l putem recupera cumva pe x din s . Să presupunem acum că x este limitat în bandă. După cum am văzut, putem recupera x din s numai dacă x este limitat în bandă şi eşantionat la o rată suficient de mare pentru a se evita aliasing-ul. În cazul în care nu apare fenomenul de aliasing, putem reconstrui funcţia iniţială x din y folosind convertorul ideal D/C prezentat în figură.

1. În primul rând, convertim şirul y în trenul de impulsuri s şi obţinem

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \delta(t - Tn)$$

2. Apoi, filtrăm funcția rezultată s cu filtrul trece-jos considerat, ce-l are ca răspuns la impuls pe h , respectiv răspunsul în frecvență H . Urmărim pe slide ce obținem.

Dacă x este de bandă limitată și aliasing-ul a fost evitat, atunci $\hat{x}(t) = x(t)$ și avem o formulă matematică pentru reproducerea exactă a lui x din eșantioanele sale y .

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

TEOREMA EȘANTIONĂRII

Fie x o funcție (un semnal definit în timp continuu) având transformata Fourier X și fie y șirul (semnalul definit în timp discret) rezultat din eșantionarea lui x cu perioada de eșantionare T , respectiv șirul definit prin:

$$y[n] = x(Tn).$$

Presupunem că X este limitată la intervalul $[-\omega_M, \omega_M]$, respectiv că avem:

$$|X(\omega)| = 0, \quad (\forall) \omega \text{ pentru care } |\omega| > \omega_M.$$

Atunci x este unic determinat de y dacă se îndeplinește condiția

$$\omega_s > 2\omega_M,$$

$$\text{unde } \omega_s = \frac{2\pi}{T}.$$

În aceste condiții vom avea:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \sin c \left[\frac{\pi}{T} (t - nT) \right],$$

sau în exprimare echivalentă:

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} y[n] \sin c \left(\frac{\omega_s}{2} t - n\pi \right).$$

MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

17

Reunim rezultatele obținute anterior în ceea ce este cunoscut sub denumirea de *teorema eșantionării*. Aceasta are enunțul din slide. Să-l urmărim.

Ca o chestiune de terminologie, ne referim la inegalitatea $\omega_s > 2\omega_M$ ca fiind *condiția Nyquist* (sau *criteriul Nyquist*).

De asemenea, numim *frecvență Nyquist* valoarea $\omega_s/2$ și *rată Nyquist* valoarea $2\omega_M$.

Este important de reținut că în condiția Nyquist avem o inegalitate strictă. Prin urmare, pentru a ne asigura că aliasing-ul nu are loc în cazul cel mai general, trebuie să avem o rată de eșantionare mai mare decât rata Nyquist.

Se poate arăta, totuși, că dacă spectrul de frecvență nu conține impulsuri la frecvența Nyquist, este suficientă eșantionarea exact la rata Nyquist.

Evident inegalitatea rămâne valabilă și dacă folosim frecvențele în locul pulsațiilor, deoarece:

$$\underbrace{2\pi f_s}_{=\omega_s} > 2 \cdot \underbrace{2\pi f_M}_{=\omega_M} \Rightarrow f_s > 2f_M$$

PUNTEA DINTRE SEMNALELE ANALOGICE ȘI SEMNALELE DISCRETE



HARRY NYQUIST ȘI CLAUDE SHANNON

TEOREMA EȘANTIONĂRII (1920)

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) \sin c \left[\frac{\pi}{T} (t - nT) \right]$$

Rezultatul evidențiat anterior reprezintă puntea de legătură dintre semnalele analogice și semnalele discrete.

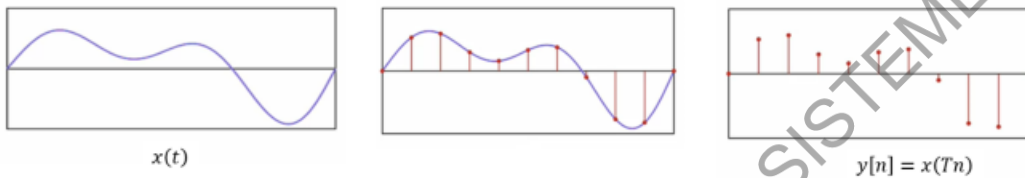
Ceea ce a fost demonstrat, încă la începutul secolului trecut, de către Harry Nyquist și Claude Shannon, stabilește că, în condițiile enunțate de teorema eșantionării, reprezentarea în timp continuu și reprezentarea în timp discret sunt echivalente.

Relația dintre semnalul analogic (cel în timp continuu) și semnalul discret (cel în timp discret) este dată prin formula stabilită.

După cum putem vedea din enunțul teoremei, putem construi reprezentarea în timp continuu, a semnalului analogic, ca o combinație liniară de copii ale funcției *sinus atenuat* ($\sin c$), ce sunt deplasate și multiplicare (scalate) cu valorile semnalului în timp discret.

Așadar interpolarea nu se va face simplist, unind pur și simplu punctele semnalului discret prin segmente de dreaptă, pentru a reveni la semnalul în timp continuu, ci vom apela la sinusul atenuat!

DIN TIMP CONTINUU ÎN TIMP DISCRET ... EȘANTIONARE

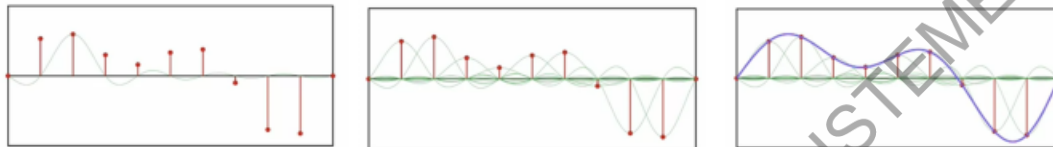


MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

19

Trecerea din timp continuu în timp discret se realizează după cum urmează:
Pornim de la semnalul analogic (adică cel reprezentat în timp continuu).
Reținem din $x(t)$ numai eșantioanele (valorile) corespunzătoare momentelor discrete de timp, iar restul nu ne mai interesează.
Se ajunge astfel la semnalul digital $y[n]$ (adică cel reprezentat în timp discret).

... ȘI ÎNAPOI INTERPOLARE



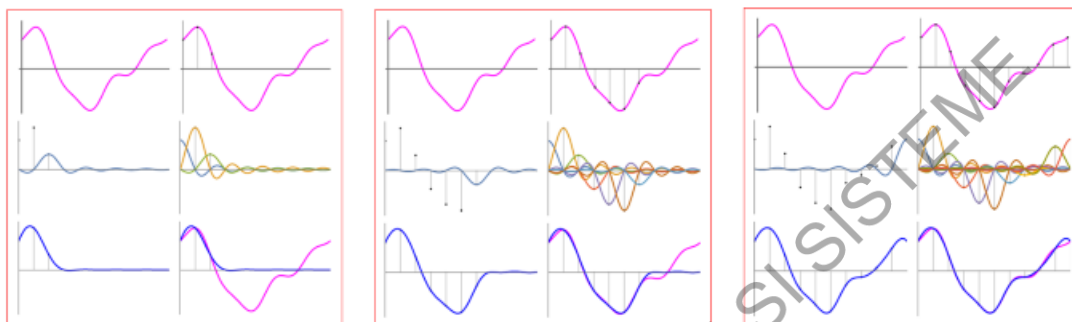
MARIN BANCOS - SEMNALE ȘI SISTEME

20

Pentru revenirea din timp discret în timp continuu, tot ce avem nevoie este să luăm reprezentările sinusului atenuat și să le centrăm, pe rând, pe poziția corespunzătoare fiecărui eșantion, scalate fiind fiecare, în prealabil, cu amplitudinea eșantionului.

După ce vom face acest lucru, vom însuma apoi toate aceste reprezentări ale sinusului atenuat, ajungând exact la funcția originală.

Exemplu de reconstrucție după eșantionarea unui semnal de bandă limitată



WOLFRAM Demonstrations Project

MARIN BANCOȘ - SEMNALE ȘI SISTEME

21

Gluma de final de curs

Ce te invata
profesorul



Ce-ti pica la
examen



Ce-ti amintesti

