

CURSUL 9

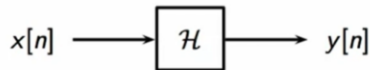
SISTEM. LINIARITATE. INVARIANȚĂ ÎN TIMP. SDLIT.
RĂSPUNSUL LA IMPULSUL DELTA AL UNUI SDLIT.
CONVOLUȚIE. ALGORITM DE CALCUL. PROPRIETĂȚI. TEOREMA CONVOLUTIEI.
FILTRE NUMERICE. CLASIFICAREA FUNCȚIE DE RĂSPUNSUL
ÎN TIMP DISCRET LA IMPULSUL DELTA.
BIBO – STABILITATEA FILTRELOR NUMERICE ȘI TEOREMA FUNDAMENTALĂ A
STABILITĂȚII.
CLASIFICAREA FILTRELOR FUNCȚIE DE $DTFT\{h[n]\} = H(e^{j\omega})$.
FILTRUL TRECE-JOS ÎN VARIANTA IDEALĂ.
FILTRELE TRECE-SUS ȘI TRECE-BANDĂ ÎN VARIANTA IDEALĂ.
UTILIZAREA FILTRĂRII TRECE-JOS LA DEMODULAREA
UNUI SEMNAL MODULAT SINUSOIDAL.

1

SLIDE 1

În procesarea semnalului digital, partea de procesare poate fi, desigur, orice algoritm arbitrar. Dacă ne concentrăm, însă, pe clasa așa-numitelor sisteme digitale liniare invariante în timp (SDLIT), vom schimba generalitatea maximă cu un cadru matematic foarte puternic, care ne permite să garantăm anumite rezultate privind proprietățile și stabilitatea prelucrării. Iată care este conținutul cursului de astăzi.

UN BLOC GENERIC PENTRU PROCESAREA SEMNALELOR ÎN TIMP DISCRET



$$y[n] = \mathcal{H}\{x[n]\}$$

2

SLIDE 2

Totul începe în domeniul timpului...

În general, când vorbim despre procesarea semnalului, ne imaginăm o situație în care avem un semnal de intrare, $x[n]$, un semnal de ieșire, $y[n]$, produs de un fel de black-box (cutie neagră) care transformă semnalul de intrare în cel de ieșire.

Putem scrie relația intrare-ieșire, matematic, astfel: $y[n]$ este egal cu un operator $\mathcal{H}$ aplicat semnalului de intrare $x[n]$.

Deja când desenăm această schemă bloc facem anumite presupuneri cu privire la structurarea prelucrării, în sensul că avem un sistem cu o singură intrare și o singură ieșire. Ne-am putea imagina, însă, un sistem cu intrări multiple și/sau ieșiri multiple. Dar chiar și cu aceste limitări, posibilitățile pentru ceea ce intră în această cutie neagră sunt aproape nelimitate.

Dacă nu impunem anumite condiții tipului de procesare care are loc, nu vom putea spune nimic semnificativ despre operația în sine.

LINIARITATEA – O PRIMĂ CONDIȚIE

$$\mathcal{H}\{\alpha x_1[n] + \beta x_2[n]\} = \alpha \mathcal{H}\{x_1[n]\} + \beta \mathcal{H}\{x_2[n]\}$$

3

SLIDE 3

Prima cerință pe care o impunem adesea unui sistem este *liniaritatea*.

Aceasta înseamnă că dacă avem două semnale de intrare și luăm o combinație liniară a acestora, atunci ieșirea obținută este chiar combinația liniară a semnalelor de ieșire care s-ar obține separat, prin prelucrarea fiecărei secvențe de intrare în mod independent.

INVARIANȚA ÎN TIMP – A DOUA CONDIȚIE

$$y[n] = \mathcal{H}\{x[n]\} \iff \mathcal{H}\{x[n - n_0]\} = y[n - n_0]$$

4

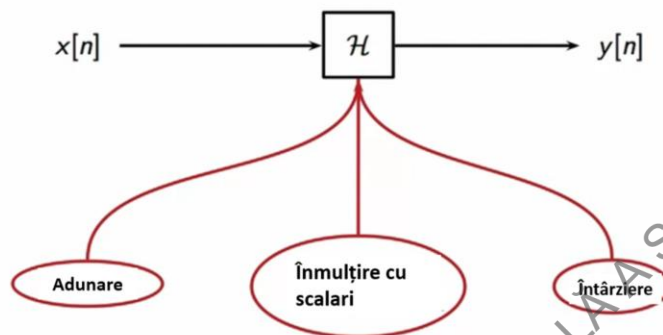
SLIDE 4

A doua cerință pe care o impunem dispozitivului de procesare este *invarianța în timp*.

Invarianța în timp, în termeni uzuali, înseamnă pur și simplu că sistemul se va comporta întotdeauna exact în același mod, independent de momentul în care se dă startul procesării.

Matematic, însă, avem că dacă $y[n]$ este ieșirea sistemului, atunci când intrarea este $x[n]$, dacă vom pune o versiune întârziată a acestui semnal pe intrare, $x[n - n_0]$, ceea ce vom obține pe ieșire este exact același semnal, la care ne așteptăm, dar întârziat cu n_0 , adică $y[n - n_0]$.

SISTEM DISCRET LINIAR INVARIANT ÎN TIMP (SDLIT)



5

SLIDE 5

Deci, care sunt ingredientele care intră în descrierea unui *sistem discret liniar și invariant în timp* (SDLIT)? Ei bine, ele sunt numai ingrediente liniare. Adunarea, care este o operație liniară, împreună cu înmulțirea cu scalari, o altă operație liniară și, respectiv, întârzierea în timp.

CAUZALITATE

$$y[n] = H(x[n], x[n-1], x[n-2], \dots, y[n-1], y[n-2], \dots)$$

unde operatorul $H(\cdot)$ este liniar

6

SLIDE 6

O altă cerință, care nu este obligatorie, dar are consistență dacă vrei să utilizați sistemul cu variație liniară în timp în timp real, este *cauzalitatea sistemului*.

Prin asta înțelegem că sistemul poate avea acces doar la valorile de intrare din prezent și trecut și, respectiv, la valorile de ieșire din trecut.

În acest caz, puteți scrie relația intrare-ieșire după cum urmează: ieșirea este o funcțională liniară a valorii prezente și a valorilor trecute ale intrării, și, respectiv, a valorilor trecute ale ieșirii.

FUNCȚIA PONDERE $h[n]$ A UNUI SDLIT ESTE RĂSPUNSUL SISTEMULUI LA SEMNALUL DELTA $\delta[n]$ ÎN TIMP DISCRET

Important: funcția pondere $h[n]$ se mai numește și răspunsul sistemului la impulsul $\delta[n]$

$$h[n] = \mathcal{H}\{\delta[n]\}$$

Rezultat fundamental:

Funcția pondere, $h[n]$, a unui SDLIT caracterizează complet comportamentul sistemului

7

SLIDE 7

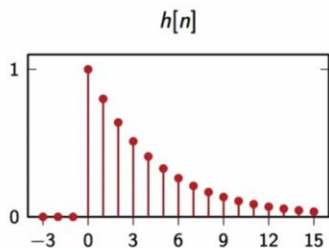
Răspunsul la impuls al unui SDLIT este considerat semnalul de ieșire al acestuia atunci când la intrare se aplică semnalul delta în timp discret, $\delta[n]$.

Se mai folosește pentru răspuns și denumirea de *funcție pondere a sistemului*.

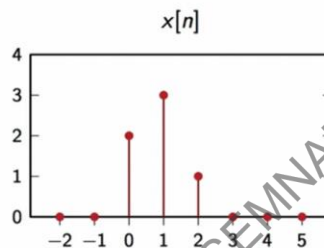
Un **rezultat fundamental** stabilește că funcția pondere (sau răspunsul la impuls) al unui SDLIT caracterizează pe deplin comportamentul acestuia.

Să argumentăm folosind un...

EXEMPLU



$$h[n] = \alpha^n u[n]$$



$$x[n] = \begin{cases} 2 & n = 0 \\ 3 & n = 1 \\ 1 & n = 2 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

8

SLIDE 8

Să argumentăm, cu un exemplu, de ce stau lucrurile așa.

Să presupunem că avem un SDLIT și că răspunsul sistemului la impulsul delta în timp discret, $\delta[n]$, este secvența dată de exponențiala descrescătoare $h[n] = \alpha^n u[n]$, unde $|\alpha| < 1$.

Acum, dorim să folosim acest sistem pentru a prelucra o secvență arbitrară, $x[n]$, care, în acest exemplu, este pur și simplu o secvență având eșantioane nenule doar în trei puncte, respectiv secvența din slide.

Calculăm răspunsul:

- ▶ $x[n] = 2\delta[n] + 3\delta[n - 1] + \delta[n - 2]$
- ▶ Cunoaștem funcția pondere: $h[n] = \mathcal{H}\{\delta[n]\};$
- ▶ Calculăm $y[n] = \mathcal{H}\{x[n]\}$ exploatând liniaritatea și invarianța în timp

$$y[n] = \mathcal{H}\{2\delta[n] + 3\delta[n - 1] + \delta[n - 2]\}$$

$$= 2\mathcal{H}\{\delta[n]\} + 3\mathcal{H}\{\delta[n - 1]\} + \mathcal{H}\{\delta[n - 2]\}$$

Cunoscând $h[n]$, cunoaștem deci și $y[n]$

$$= 2h[n] + 3h[n - 1] + h[n - 2]$$

9

SLIDE 9

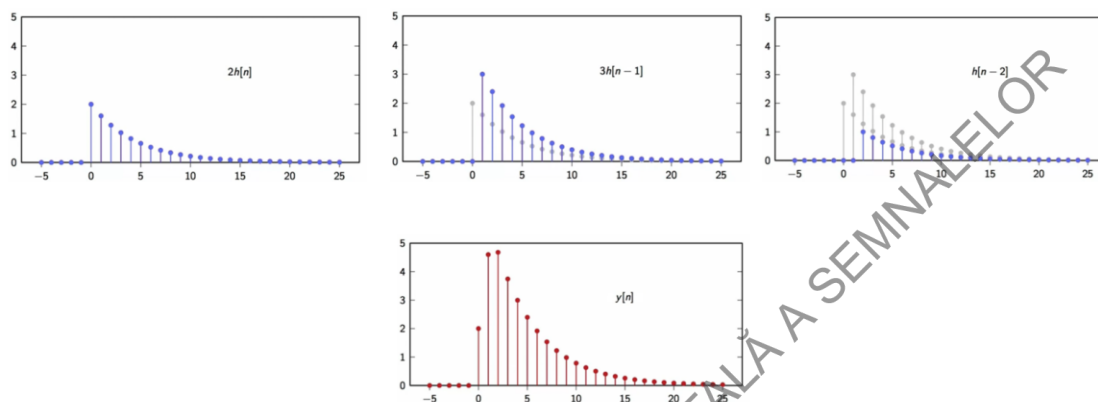
Este simplu de scris semnalul de intrare, $x[n]$, cu ajutorul secvenței delta în timp discret $\delta[n]$: urmăriți primul rând.

Cunoaștem funcția pondere a sistemului, adică răspunsul acestuia la impulsul delta: al doilea rând. Ea este exponențiala descrescătoare, așa cum am stabilit.

Exploatând liniaritatea și invarianța în timp a sistemului, îl putem scrie pe $y[n]$. Haideți să urmărim pe slide.

Rezultatul care se obține ne arată că dacă îl știm pe $h[n]$, iar noi îl știm, atunci îl știm și pe $y[n]$.

Reprezentarea grafică a răspunsului



10

SLIDE 10

Putem vizualiza rezultatele grafic.

Primul termen al sumei, al doilea termen al sumei, al treilea termen al sumei și, în final, rezultatul obținut prin însumarea celor trei.

CONVOLUȚIA:

Știm că, întotdeauna, putem scrie:

$$x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]\delta[n-k]$$

Exploatănd liniaritatea sistemului și invarianța sa în timp vom obține:

$$\begin{aligned} y[n] &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] \\ &= x[n] * h[n] \end{aligned}$$

11

SLIDE 11

În general, amintiți-vă că putem scrie întotdeauna $x[n]$ ca pe o sumă după indexul k , care merge de la minus infinit la plus infinit, dintr-o secvență de delte întârziate în timp și scalate de valorile secvenței în sine la fiecare moment.

Acum chiar vedem utilitatea acestei reprezentări deoarece, prin liniaritate și invarianță în timp, putem exprima rezultatul cules pe ieșirea sistemului ca sumă după k , care pleacă de la minus

infinit la plus infinit, de valori ale secvenței de intrare în produs cu răspunsul la impuls, inversat în timp și întârziat cu n .

Această sumă, de aici, este atât de importantă în procesarea semnalelor încât își primește propriul nume și se numește *convoluția* secvențelor $x[n]$ și $h[n]$, iar notația utilizată pentru ea este cea cu asterisc.

Calculul algoritmic al convoluției

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$

„Inversarea” timpului pentru $h[k]$

Ingredientele utilizate:

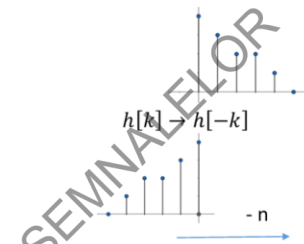
- Prima secvență $x[k]$
- A doua secvență $h[k]$

Rețeta:

- „Inversarea” timpului pentru $h[k] \rightarrow h[-k]$
- La fiecare pas n (începând de la $-\infty$ și până la $+\infty$):

- Se centrează în n secvența $h[-k]$ inversată în timp (adică se face o deplasare cu $-n$)
- Se calculează produsul între ceea ce s-a obținut și secvența de intrare: $x[k]h[n-k]$

Se poate calcula, acum, produsul scalar, adică convoluția.



$$h[-k] \rightarrow h[n-k] = h[-(k-n)]$$

12

SLIDE 12

Convoluția este, de fapt, o formulă algoritmică pentru a calcula rezultatul de pe ieșirea SDLIT.

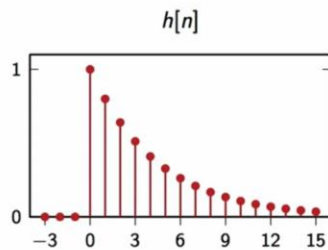
Ingredientele utilizate sunt: o secvență de intrare $x[k]$ și o a doua secvență, $h[k]$.

Rețeta utilizată pentru calcul presupune următorii pași:

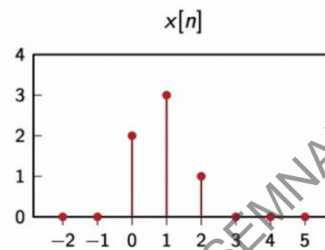
- în primul rând, inversăm în timp răspunsul la impuls
- apoi, la fiecare pas, de la minus infinit la plus infinit, centrăm în eșantionul curent n răspunsul la impuls inversat în timp, adică deplasăm răspunsul în timp inversat cu $(-n)$
- în final, calculăm produsul scalar dintre ce s-a obținut și secvența de intrare $x[k]$

Pe un exemplu concret vom înțelege mult mai bine algoritmul descris.

Același exemplu, o altă perspectivă



$$h[n] = \alpha^n u[n]$$



$$x[n] = \begin{cases} 2 & n=0 \\ 3 & n=1 \\ 1 & n=2 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

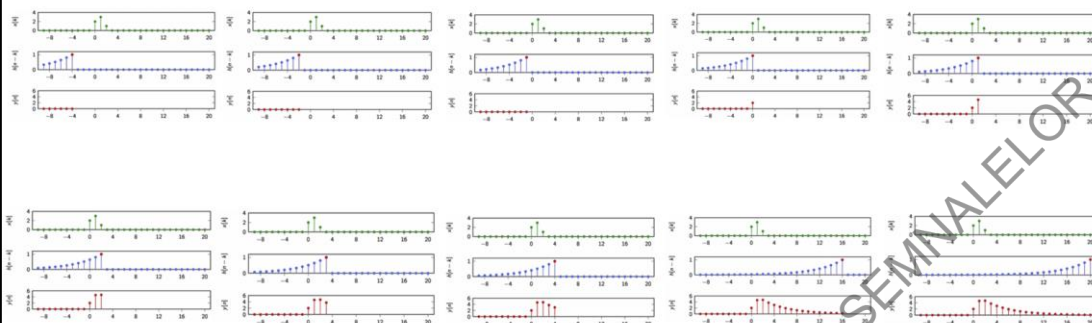
13

SLIDE 13

Să urmărim totul grafic, folosind același exemplu pe care l-am folosit și mai înainte.

Aplicarea algoritmului descris

$$x[n] * h[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k]$$



14

SLIDE 14

Punem cele trei semnale implicate pe o diagramă precum cea din figură. Avem secvența de intrare $x[k]$ deasupra.

Avem $h[n-k]$, ca răspuns la impuls cu timpul inversat și întârzierea, pe al doilea panou.

Și, în final, avem produsul scalar dintre cele două secvențe.

Deci, la fiecare pas, așa cum am spus, fixăm răspunsul la impuls inversat în timp pe eșantionul curent. Să începem cu $n=-4$ și să calculăm produsul scalar.

Deoarece semnalul, din exemplul nostru, este nenul doar între 0 și 2, până la 0, în principiu, nu se întâmplă nimic, iar produsul scalar este 0.

Putem vedea că a fost 0 pentru toate valorile dinainte de -4, și va continua să fie 0 până când ajungem la $n=0$. În acel moment, începem să avem o suprapunere între cele două secvențe, iar produsul scalar nu va mai fi 0.

La primul pas, care contează, va fi egal cu produsul dintre eșantionul din $h[n-k]$, care este egal cu 1, și eșantionul din $x[k]$, care este egal cu 2. Deci, suma totală va fi egală cu: $0+0+\dots+0+2=2$.

Mai avansăm un pas și vedem că suprapunerea implică acum două puncte, la 0 și la 1. Calculăm produsele și, apoi, suma lor și obținem al doilea punct relevant din secvența noastră de ieșire.

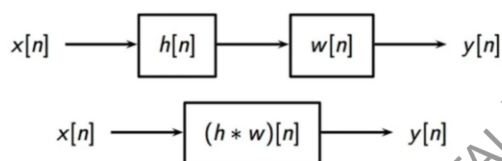
La al treilea pas, vom implica, în sfârșit, toate cele trei puncte reprezentative din secvența de intrare, de la 0, 1 și 2. Calculăm produsele și suma și obținem al treilea eșantion nenul de ieșire.

Iar procesul continuă spre infinit în acest mod.

Acum, deoarece răspunsul la impuls este o secvență nenulă infinită, de acum înainte suprapunerea pe cele trei eșantioane rămâne și contează, iar produsul scalar va fi întotdeauna diferit de zero, rezultând o ieșire care va continua să fie diferită de zero pentru totdeauna.

Proprietățile convoluției

- Liniaritate și invarianță în timp
- Comutativitate $(x * h)[n] = (h * x)[n]$
- Asociativitate pentru secvențele care sunt, simultan, absolut sumabile și de pătrat sumabil
 $((x * h) * w)[n] = (x * (h * w))[n]$



15

SLIDE 15

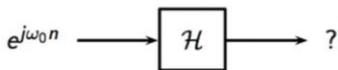
Să trecem în revistă principalele proprietăți ale convoluției.

Convoluția este, desigur, liniară și invariantă în timp, deoarece descrie o operație liniară și invariabilă în timp.

De asemenea, ea este comutativă, ceea ce înseamnă că dacă aveți două sisteme în cascadă, le puteți inversa în siguranță, iar rezultatul nu se va schimba.

Pentru secvențe absolut sumabile și de pătrat sumabil, convoluția este și asociativă, ceea ce înseamnă că dacă aveți un sistem în cascadă, puteți grupa efectul într-un singur sistem, al cărui răspuns la impuls este convoluția răspunsurilor la impuls individuale.

Care este răspunsul SDLIT
la exponențiala complexă $e^{j\omega_0 n}$?



$$\begin{aligned}
 y[n] &= e^{j\omega_0 n} * h[n] \\
 &= h[n] * e^{j\omega_0 n} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{j\omega_0 (n-k)} \\
 &= e^{j\omega_0 n} \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega_0 k} \\
 &= H(e^{j\omega_0}) e^{j\omega_0 n}
 \end{aligned}$$

16

SLIDE 16

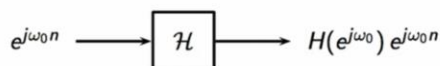
Să urmărim ce se întâmplă dacă pentru un sistem digital liniar și invariant în timp, $\mathcal{H}$, folosim ca semnal de intrare o exponențială complexă, de frecvență cunoscută ω_0 . Ei bine, haideți să scriem convoluția.

Exploatăm faptul că convoluția este comutativă și schimbăm ordinea termenilor din produsul de convoluție. Scriem în mod explicit suma prin care se definește operația de convoluție. După efectuarea produselor la exponent, putem scoate din sumă termenul constant, care nu depinde de k . Suma rămasă este, însă, chiar DTFT-ul răspunsului sistemului la impuls, calculat în ω_0 , notat de noi cu $H(e^{j\omega_0})$.

Rețineți. O secvență *vector propriu* este o secvență care, atunci când este introdusă într-un sistem discret liniar și invariant în timp, se returnează secvența în sine, înmulțită cu un factor de scalare.

Este și cazul exponențialei complexe, considerată de noi. În cazul nostru, factorul de scalare se întâmplă să fie valoarea DTFT a răspunsului la impuls, pentru frecvența exponențialei de intrare.

Două concluzii:



- Exponențialele complexe în timp discret sunt *vectori proprii* pentru SDLIT, adică semnale discrete la care forma nu se schimbă la trecerea prin sistem. Prin urmare, un SDLIT nu poate schimba frecvența semnalelor sinusoidale în timp discret.
- $\text{DTFT}\{h[n]\} = H(e^{j\omega_0})$ determină complet *frecvența caracteristică* a unui SDLIT.

17

SLIDE 17

Prima concluzie rezultată este că sistemul discret liniar și invariant în timp nu va modifica frecvența unei intrări sinusoidale în timp discret.

A doua concluzie este că DTFT-ul răspunsului la impuls determină pe deplin *frecvența caracteristică* a sistemului pentru o frecvență dată.

Amplitudinea și faza lui DTFT $\{h[n]\} = H(e^{j\omega_0})$

Dacă $H(e^{j\omega_0}) = Ae^{j\theta}$, atunci

$$\mathcal{H}\{e^{j\omega_0 n}\} = Ae^{j(\omega_0 n + \theta)}$$

Amplitudinea

- amplificare ($A > 1$)
- atenuare ($0 \leq A < 1$)

Deplasarea fazei

- întârziere ($\theta < 0$)
- avans ($\theta > 0$)

18

SLIDE 18

Să examinăm ce se întâmplă atunci când procesăm o exponențială complexă folosind un sistem discret liniar și invariant în timp.

Scriem DTFT-ul răspunsului $h[n]$ la impuls al sistemului, sub forma $H(e^{j\omega_0}) = Ae^{j\theta}$, unde A este un număr real pozitiv, iar θ este un unghi între $-\pi$ și π .

Avem apoi că exponențiala complexă procesată este exponențiala complexă inițială, care a fost scalată cu amplitudinea A și a fost întârziată sau avansată printr-un termen de fază θ .

Acum, dacă A este mai mare decât 1, atunci avem o amplificare. Dacă A este mai mic de 1, atunci avem o atenuare.

Referindu-ne la deplasarea fazei, dacă θ este mai mare de 0, atunci avem avans, iar atunci când este mai mic decât 0, avem o întârziere.

TEOREMA CONVOLUȚIEI:

- Răspunde la întrebarea: DTFT $\{x[n] * h[n]\} = ?$

$$\begin{aligned}
 \text{DTFT} \{x[n] * h[n]\} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} (x * h)[n] e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] e^{-j\omega n} \\
 &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k] e^{-j\omega(n-k)} e^{-j\omega k} \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] e^{-j\omega k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} h[n-k] e^{-j\omega(n-k)} \\
 &= H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})
 \end{aligned}$$

19

SLIDE 19

Teorema convoluției, rezultat foarte important, ne răspunde la întrebarea din slide: cine este DTFT-ul convoluției dintre semnalul de intrare și răspunsul la impuls?

Pentru prima linie aplicăm definiția DTFT.

A doua linie se obține înlocuind, cu ajutorul relației de definiție a convoluției, pe $(x * h)[n]$. Ținând cont că: $n = n - k + k$, la exponent, rezultă imediat a treia linie. Se inversează cele două sume și se scoate în fața celei de a doua sume $x[k] e^{-j\omega k}$. Se obține imediat produsul dintre DTFT-ul răspunsului la impuls al sistemului și DTFT-ul secvenței de intrare.

Rețineți că, pentru un SDLIT:

Folosind *definiția convoluției*, în timp discret vom obține:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]h[n-k] = x[n] * h[n] = h[n] * x[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k]$$

comutativitatea convoluției

Folosind *teorema convoluției*, în frecvență vom obține:

$$DTFT\{y[n]\} = DTFT\{x[n] * h[n]\} = DTFT\{x[n]\} \cdot DTFT\{h[n]\} = X(e^{j\omega}) \cdot H(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) \cdot X(e^{j\omega})$$

20

SLIDE 20

Sunt importante de reținut cele două observații din slide.

Filtru în timp discret (filtru numeric, filtru digital) = SDLIT

Vom asimila, în cele ce urmează, un *filtru în timp discret (adică filtru numeric sau filtru digital)* cu un *sistem discret liniar invariant în timp*, cu ajutorul căruia o secvență discretă de intrare va fi transformată (printr-un algoritm numeric) într-o secvență (filtrată) de ieșire.

21

SLIDE 21

Dăm definiția filtrului numeric, asimilându-l cu un SDLIT.

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

Clasificarea filtrelor funcție de răspunsul lor în timp discret la impulsul $\delta[n]$

- **Finite Impulse Response – FIR:** cu răspuns finit la impuls
- **Infinite Impulse Response – IIR:** cu răspuns infinit la impuls
- **Cauzale**
- **Necauzale**

22

SLIDE 22

În funcție de forma răspunsului la impuls a unui filtru, îl putem eticheta ca aparținând uneia dintre următoarele categorii.

Avem

- filtre cu răspuns finit la impuls, sau FIR, pe scurt,
- avem filtre cu răspuns infinit la impuls sau IIR,
- avem filtre cauzale și
- avem filtre noncauzale (sau necauzale).

Filtrele de tip FIR

- Răspunsul la impuls al filtrului este de suport finit
- Numai un număr finit de eșantioane ale semnalului de intrare sunt implicate în calculul fiecărui eșantion al răspunsului

23

SLIDE 23

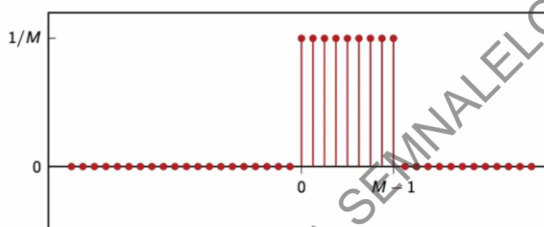
Filtrele FIR au un răspuns la impuls cu un suport finit. Din această cauză și din cauza modului în care se calculează suma de convoluție, doar un număr finit de eșantioane ale semnalului de intrare este implicat în calculul fiecărui eșantion de ieșire.

EXEMPLU DE FILTRU NUMERIC FIR: Filtrul cu mediere mobilă

Răspunsul filtrului la impuls:

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \delta[n-k]$$

$$= \begin{cases} 1/M & \text{pt } 0 \leq n < M \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$



24

SLIDE 24

Un exemplu tipic de filtru FIR este filtrul cu mediere mobilă din slide, la care numai M eşantioane sunt diferite de zero.

Filtrele de tip IIR

- Răspunsul la impuls al filtrului este de suport infinit
- Un număr infinit de eșantioane ale semnalului de intrare pot fi implicate în calculul fiecărui eșantion al răspunsului
- Surprinzător, însă, în multe cazuri calculul pentru fiecare eșantion de ieșire poate fi realizat într-un număr finit de pași

25

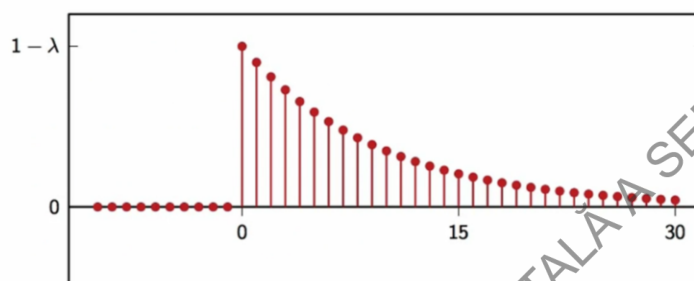
SLIDE 25

Pe de altă parte, filtrele IIR au un suport infinit pentru răspunsul lor la impuls. Așadar, este posibil, dar nu obligatoriu, ca un număr infinit de eșantioane ale semnalului de intrare să fie implicate în calculul fiecărui eșantion de ieșire.

Cu toate acestea, poate în mod surprinzător, în multe cazuri putem calcula fiecare eșantion de ieșire într-o perioadă finită de timp, adică într-un număr finit de pași.

EXEMPLU DE FILTRU NUMERIC IIR: Filtrul *leaky integrator*

Răspunsul filtrului la impuls: $h[n] = (1 - \lambda)\lambda^n u[n]$



26

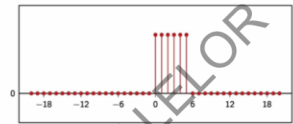
SLIDE 26

De exemplu, pentru filtrul IIR luat ca exemplu în figură, putem calcula fiecare eșantion de ieșire cu doar trei operații.

CAUZAL vs NECAUZAL

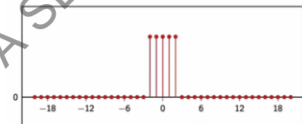
■ Cauzal:

- Răspunsul la impuls al filtrului este zero pentru toate valorile $n < 0$
- Numai eșantioanele anterioare celui curent de pe intrare sunt implicate în calculul eșantionului de ieșire pentru acel moment
- Filtrele cauzale pot funcționa „on line”, adică în timp real, din moment ce ele țin cont numai de eșantioanele precedente



■ Noncauzal:

- Răspunsul la impuls al filtrului este nenul pentru anumite valori (sau chiar pentru toate valorile) $n < 0$
- Poate fi implementat numai în mod „offline”, adică nu în timp real (respectiv numai atunci când toate datele sunt disponibile, fiind stocate, cum este cazul la procesarea unor imagini înregistrate)



27

SLIDE 27

Se spune că un filtru este cauzal dacă răspunsul său la impuls este zero, pentru orice n mai mic decât zero.

Acum, dacă vă amintiți cum este calculat fiecare eșantion al convoluției, calculul implică inversarea în timp a răspunsului la impuls înainte de multiplicarea cu intrarea. Aceasta înseamnă că numai valorile precedente ale intrării sunt implicate în calculul rezultatului de pe ieșire.

Filtrul cauzal, din cauza dependenței numai de trecut, poate funcționa online, poate lucra în timp real.

Un exemplu de filtru cauzal este cel cu mediere mobilă cu răspunsul la impuls dat în figură.

Un filtru non-cauzal, pe de altă parte, este un filtru al cărui răspuns la impuls este nenul pentru cel puțin o valoare negativă a indicelui n . Cu alte cuvinte, având în vedere că se face inversarea timpului pentru răspunsul la impuls, filtrele non-cauzale vor avea nevoie de eșantioane din viitor pentru a putea calcula valoarea lor curentă de ieșire. Ca atare, ele pot, desigur, să nu funcționeze în timp real. Dar există aplicații în care „viitorul” este, totuși, disponibil într-un proces, respectiv atunci când faci prelucrare de date disponibile în prealabil. Un astfel de caz este cazul prelucrării imaginilor, în care întreaga imagine este disponibilă pentru procesare încă înainte de a începe.

Un exemplu de filtru numeric necauzal este cel din figură, care corespunde tot filtrului cu mediere mobilă, la care răspunsul la impuls este centrat în 0.

STABILITATE

BIBO – stabilitate (*Bounded Input Bounded Output*) :

Când semnalul de intrare este unul mărginit, atunci și semnalul de ieșire este unul mărginit, respectiv:

$$|x[n]| < M, \text{ pentru } (\forall)n, \text{ cu } M \in \mathbb{R}, M > 0 \Rightarrow |y[n]| < L, \text{ pentru } (\forall)n, \text{ cu } L \in \mathbb{R}, L > 0$$

28

SLIDE 28

Să vorbim acum despre stabilitate. Stabilitatea este importantă pentru că ea ne garantează că sistemul nu se comportă într-un mod total neașteptat, atâta timp cât intrarea în sistem are un comportament normal. În procesarea semnalelor, faptul că intrarea se comportă „normal” este asimilat cu acela că ea este una mărginită. În acest sens definim BIBO – stabilitatea unui sistem.

TEOREMA FUNDAMENTALĂ A BIBO - STABILITĂȚII UNUI FILTRU

Un filtru este BIBO - stabil dacă și numai dacă răspunsul său la impuls (funcția sa pondere) este o secvență în timp discret absolut sumabilă.

29

SLIDE 29

Urmează acum un rezultat foarte important în ceea ce privește stabilitatea unui filtru.

Teorema fundamentală a BIBO-stabilității filtrelor afirmă că un filtru este BIBO-stabil dacă și numai dacă răspunsul său la impuls este unul absolut sumabil.

Pentru a demonstra acest lucru, vom demonstra atât necesitatea, cât și suficiența.

Demonstrația teoremei

„ $\Leftarrow$ ”

Presupunem că:

- ▶ $|x[n]| < M$
- ▶ $\sum_n |h[n]| = L < \infty$

Arătăm că:

- ▶ $|y[n]|$ este mărginit

$$\begin{aligned} |y[n]| &= \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[n-k] \right| \\ &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]x[n-k]| \\ &\leq M \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| \\ &< ML \end{aligned}$$

30

SLIDE 30

Demonstrația într-un sens presupune că *intrarea este mărginită* și că *răspunsul la impuls al filtrului este absolut sumabil*. Ceea ce vrem să demonstrăm este că, în acest caz, *ieșirea va fi una mărginită*.

Să urmărim mersul demonstrației. Pe primul rând se ține cont de comutativitatea convoluției și de formula sa de definiție. Avem apoi că: (modulul sumei) este mai mic sau egal cu (suma modulelor). Conform ipotezei, intrarea este maximizată de valoarea constantă M , pe care o putem scoate în fața sumei. Ținând, acum, cont de faptul că răspunsul la impuls este absolut sumabil, conform ipotezei, suma este și ea mărginită de valoarea constantă L , iar rezultatul este, apoi, imediat.

„ $\Rightarrow$ ”

Presupunem că:

- ▶ $|x[n]| < M$
- ▶ $|y[n]| < P$

Arătăm că:

- ▶ $h[n]$ - secvență absolut sumabilă

Presupunem, prin absurd, că are loc:

$$\sum_n |h[n]| = \infty$$

- ▶ Fie: $x[n] = \begin{cases} +1 & \text{pt } h[-n] \geq 0 \\ -1 & \text{pt } h[-n] < 0 \end{cases}$

Evident $x[n]$ este mărginit

- ▶ Obținem:

$$y[0] = (x * h)[0] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k]x[-k] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |h[k]| = \infty$$

CONTRADICȚIE CU
IPOTEZA INIȚIALĂ:
 $y[0] = \infty < P$

31

SLIDE 31

Demonstrația în celălalt sens pornește de la ipoteza că *intrarea și ieșirea sunt ambele mărginite* și arătăm că *răspunsul la impuls al filtrului este absolut sumabil*.

Procedăm prin metoda reducerii la absurd și presupunem că răspunsul la impuls al sistemului nu este absolut sumabil, chiar dacă sunt îndeplinite condițiile ipotezei.

Se ia un caz particular de semnal de intrare (cel din slide), care este unul evident mărginit, din moment ce el ia numai două valori: +1 și -1.

Calculând ieșirea pentru $n=0$ se obține un rezultat infinit, ceea ce înseamnă că se contrazice ipoteza inițială, că ieșirea este mărginită.

Oo...o, ce veste minunată!

Filtrele FIR sunt întotdeauna stabile.

OBSERVAȚIE: Stabilitatea filtrelor IIR se studiază prin metode indirecte, ea fiind posibilă în anumite condiții.

32

SLIDE 32

Deci, vestea bună este că filtrele FIR sunt întotdeauna stabile, deoarece răspunsul lor la impuls conține un număr finit de valori nenule și, prin urmare, suma valorilor lor absolute va fi întotdeauna una finită.

Pe de altă parte, când vine vorba de filtrele IIR, în cazul acestora trebuie să verificăm în mod explicit stabilitatea.

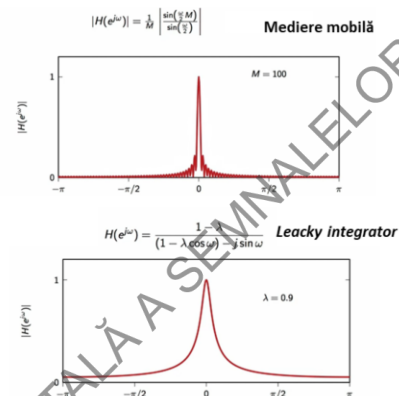
Clasificarea filtrelor în funcție de caracteristicile răspunsului în frecvență $\text{DTFT}\{h[n]\} = H(e^{j\omega})$

Clasificare funcție de amplitudine $|H(e^{j\omega})|$:

- Filtre trece-jos (*lowpass*)
- Filtre trece-sus (*highpass*)
- Filtre trece-bandă (*bandpass*)
- Filtre trece-tot (*allpass*)

Clasificare funcție de fază $\angle H(e^{j\omega})$

- Filtru cu fază liniară
- Filtru cu fază neliniară



33

SLIDE 33

Putem clasifica filtrele în funcție de amplitudine în patru categorii largi.

Filtrele trece-jos (lowpass) sunt filtre care permit frecvențelor joase să supraviețuiască și omoară orice altceva.

Filtrele trece-sus (highpass) fac exact opusul, lasă să treacă frecvențele înalte și ucid frecvențele joase, în special frecvențele din jurul lui zero.

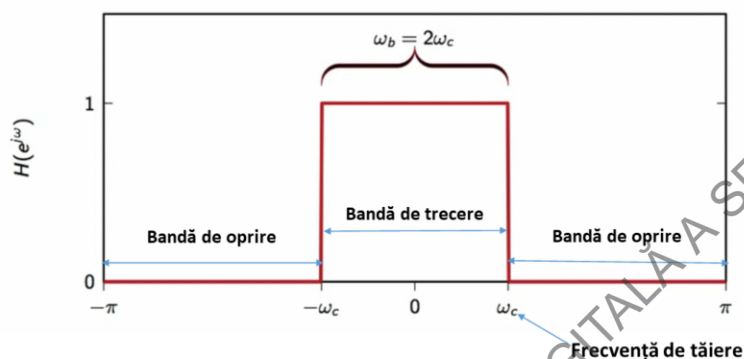
Filtrele trece-bandă (bandpass) lasă doar frecvențele dintr-o anumită bandă să treacă, iar *filtrele trece-tot (allpass)* sunt filtre pentru care amplitudinea este o constantă în întreaga bandă de frecvențe.

Această clasificare reflectă clasificarea semnalelor pe care am prezentat-o atunci când am explicat transformarea Fourier în timp discret DTFT.

De asemenea, putem clasifica filtrele în funcție de fază. Acest lucru este mai puțin frecvent, dar este important să știi dacă un filtru are o caracteristică de fază liniară sau o caracteristică de fază neliniară.

Filtrul cu mediere mobilă și, respectiv, filtrul *leaky integrator*, luate anterior ca exemple, aparțin categoriei filtrelor trece-jos. Ele au un răspuns în frecvență care este concentrat în jurul originii, după cum se și observă.

Filtrul trece-jos în varianta ideală



34

SLIDE 34

Care este, oare, cel mai bun filtru trece-jos pe care ni-l putem imagina? Ei bine, după cum am spus, un filtru trece-jos permite frecvențelor joase să treacă, și atenuează sau ucide frecvențele înalte. Deci, o versiune ideală a filtrului trece-jos ar lăsa frecvențele din banda joasă neatinse și ar atenua complet, ar ucide complet, frecvențele din banda superioară.

Așadar amplitudinea ar fi 1, pentru *banda de trecere*, și 0, pentru ceea ce numim *banda de oprire*.

Pentru a îmbunătăți situația, am avea nevoie ca răspunsul în amplitudine să fie o funcție reală, astfel încât filtrul să aibă fază zero și să nu introducă nicio întârziere.

Dacă denumim ω_c - *frecvență de tăiere*, adică frecvența la care răspunsul în amplitudine trece de la 1 la 0, putem spune că filtrul ideal trece-jos are o bandă de trecere cu o lățime de bandă ω_b , egală cu de două ori ω_c .

Caracterizarea filtrului trece-jos în varianta ideală

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{pt } |\omega| \leq \omega_c \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (\text{periodicitate implicită de } 2\pi)$$

- ▶ Banda de trecere perfect netedă (plată)
- ▶ Atenuare infinită în banda de oprire
- ▶ Fază zero (nicio deplasare)

35

SLIDE 35

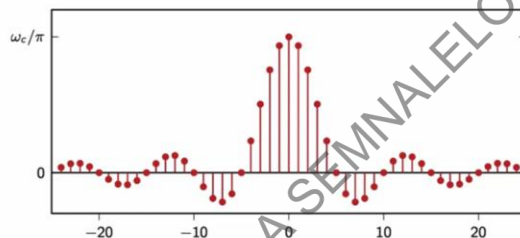
În mod formal, putem scrie răspunsul în frecvență al filtrului trece-jos ideal ca în figură.

Amintiți-vă că de fiecare dată când scriem o specificație ca aceasta, subînțelegem periodicitatea de 2π a răspunsului în frecvență al oricărei transformate Fourier.

Aceasta înseamnă că filtrul trece-jos ideal are o bandă de trecere perfect netedă, identic egală cu 1. De asemenea, el are atenuare infinită în banda de oprire și, din nou, fază zero (adică nicio deplasare).

Răspunsul la impuls (funcția pondere) în cazul filtrului trece-jos ideal

$$\begin{aligned}
 h[n] &= \text{IDFT} \{ H(e^{j\omega}) \} \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} H(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_c}^{\omega_c} e^{j\omega n} d\omega \\
 &= \frac{1}{\pi n} \frac{e^{j\omega_c n} - e^{-j\omega_c n}}{2j} \\
 &= \frac{\sin \omega_c n}{\pi n}
 \end{aligned}$$



36

SLIDE 36

Să încercăm să calculăm răspunsul la impuls al filtrului, $h[n]$, din răspunsul în frecvență, luând transformata Fourier inversă a lui $H(e^{j\omega})$.

Putem scrie formula inversei transformatei Fourier, IDTFT, pe care o știm pe de rost. Întrucât H ia valoarea zero în banda de oprire, adică pe intervalele de la ω_c la π și, respectiv, de la $-\pi$ la $-\omega_c$, limitele de integrare se pot schimba în $-\omega_c$ și ω_c . Între aceste limite H ia valoarea 1. Rămâne sub integrală numai exponențiala, iar rezultatul este imediat, dacă se ține cont de formula lui Euler pentru funcția sinus.

Dacă trasăm acest răspuns la impuls, observăm că el are o formă oscilatorie cunoscută nouă deja.

El este un răspuns la impuls de suport infinit și, spre deosebire de celelalte răspunsuri la impuls de suport infinit văzute până acum, de data aceasta suportul este infinit atât la dreapta, cât și la stânga. Aceasta este o problemă, deoarece înseamnă că indiferent de modul în care calculăm convoluția, vom avea întotdeauna un număr infinit de operații de făcut. Așadar, acest filtru trece-jos nu poate fi implementat în realitate. De aceea îl și numim ideal.

O altă problemă cu răspunsul la impuls al acestui filtru este că acesta scade foarte lent în timp, la fel ca $1/n$, de fapt.

Două vești, ambele proaste...

- **Răspunsul la impuls al filtrului trece-jos ideal are suport infinit, atât spre $-\infty$, cât și spre $+\infty$:**
 - De aceea nu se poate calcula răspunsul într-un timp finit
 - Acesta este motivul pentru care filtrul se numește „ideal”
- **Răspunsul la impuls scade foarte lent în timp**
 - De aceea va fi nevoie de un număr foarte mare de eșantioane pentru o bună aproximare

37

SLIDE 37

Avem de dat, așadar, două vești...

Forma canonică pentru filtrul trece-jos ideal

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leq 1/2 \\ 0 & |x| > 1/2 \end{cases}$$

$$\text{sinc}(x) = \begin{cases} \frac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$

$$\text{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_c}\right) \xleftrightarrow{\text{DTFT}} \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right)$$

38

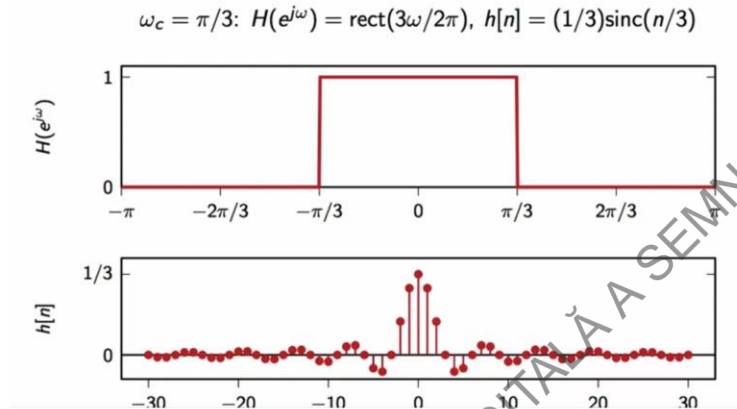
SLIDE 38

În ciuda deficiențelor semnalate, filtrul trece-jos ideal este unul extrem de important.

În cele ce urmează, folosim două funcții speciale pentru a descrie răspunsul filtrului la impuls și, de asemenea, răspunsul său în frecvență. Ambele ne sunt deja cunoscute. Funcția sinc se prelungește prin continuitate în zero, cu valoarea 1, pentru a fi definită pentru orice argument x real.

Cu aceste notații putem exprima filtrul ideal trece-jos sub formă canonică.

UN EXEMPLU



39

SLIDE 39

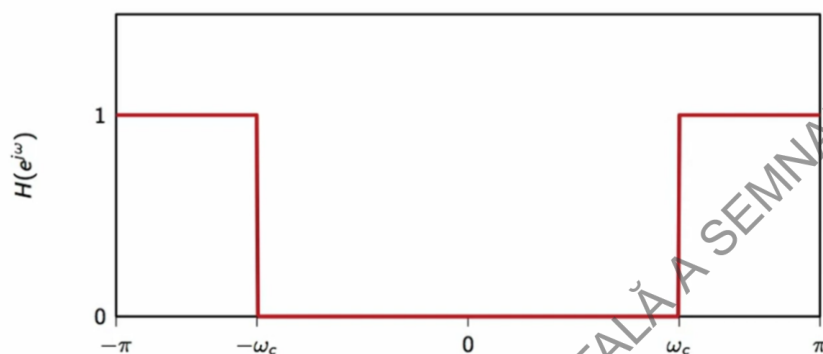
Iată un exemplu, pentru $\omega_c = \pi/3$. Avem o caracteristică trece-jos, cu această frecvență de tăiere, iar în domeniul timpului, avem $(1/3)\text{sinc}(n/3)$.

Asta înseamnă că fiecare al treilea eșantion va fi 0, deoarece de fiecare dată când n este un multiplu al lui 3, argumentul lui sinc va fi un număr întreg.

Încă două observații, cărora nu le mai dăm demonstrația:

- Funcția sinc nu este absolut sumabilă
- În consecință, un filtru ideal trece-jos nu poate fi BIBO-stabil.

Filtrul trece-sus în varianta ideală



40

SLIDE 40

Pentru acest filtru, reprezentarea este complementară celei din cazul filtrului trece-jos în varianta ideală.

Caracterizarea filtrului trece-sus în varianta ideală

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{pt } \pi \geq |\omega| \geq \omega_c \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (\text{periodicitate implicită de } 2\pi)$$

"highpass"

$$H_{hp}(e^{j\omega}) = 1 - H_{lp}(e^{j\omega})$$

"lowpass"

$$h_{hp}[n] = \delta[n] - \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right)$$

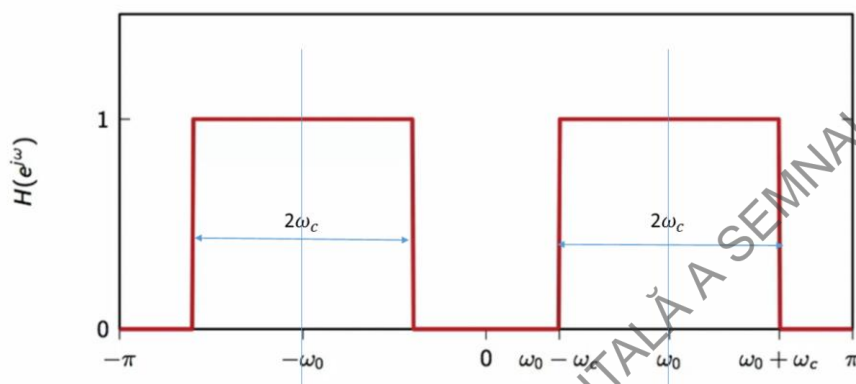
41

SLIDE 41

Iată cum arată expresia matematică a răspunsului în frecvență al filtrului trece-sus ideal. Acesta poate fi scris și funcție de răspunsul în frecvență din cazul filtrului ideal trece-jos, după cum se poate observa în a doua relație.

Nici răspunsul la impuls în domeniul timpului nu este complicat. El poate fi scris folosind o modificare foarte simplă a răspunsului la impuls al filtrului ideal trece-jos, complementar.

Filtrul trece-bandă în varianta ideală



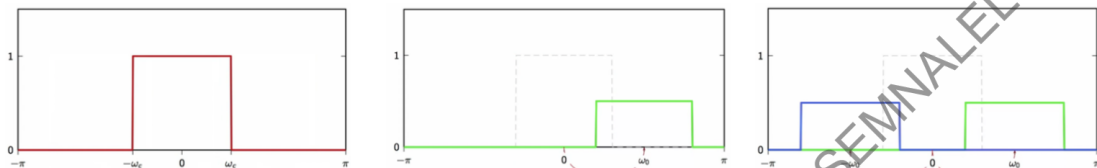
42

SLIDE 42

Aici este dată reprezentarea corespunzătoare unui filtru trece-bandă ideal.

Acest filtru păstrează frecvențele dintr-o bandă centrată în ω_0 , de lățime $2\omega_c$, răspunsul fiind simetric și în partea negativă a spectrului.

Obținerea filtrului trece-bandă în varianta ideală



43

SLIDE 43

Putem obține filtrul de interes prin modularea filtrului trece-jos ideal, folosind o modulație (co)sinusoidală. Iată cum se petrec lucrurile, cu care suntem oarecum familiarizați. Le însumăm pe cele două finale, le scalăm înapoi la amplitudinea unității și obținem filtrul nostru ideal trece-bandă.

Caracterizarea filtrului trece-bandă în varianta ideală

$$H_{bp}(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 & \text{pt } |\omega \pm \omega_0| \leq \omega_c \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad (\text{periodicitate implicită de } 2\pi)$$

$$h_{bp}[n] = 2 \cos(\omega_0 n) \frac{\omega_c}{\pi} \text{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right)$$

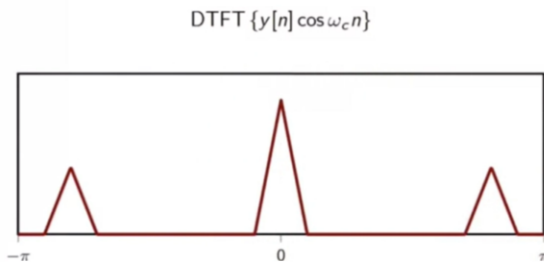
44

SLIDE 44

Acestea sunt expresiile matematice ale răspunsului în frecvență (DTFT-ul) și, respectiv, în timp discret (adică răspunsul la impuls al filtrului).

EXEMPLU DE UTILIZARE A OPERAȚIEI DE FILTRARE:

Ne aducem aminte de reprezentarea DTFT, pentru semnalul demodulat, pe intervalul $[-\pi, \pi]$, în cazul modulației sinusoidale



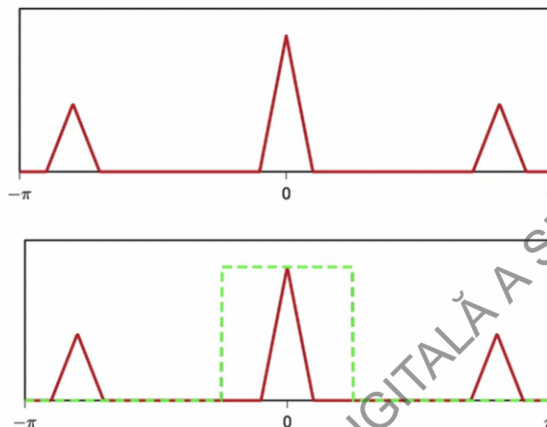
- După transmitere, putem recupera integral semnalul inițial
- În spectru apar și cele două componente suplimentare, de înaltă frecvență, care trebuie eliminate (suprimate).

45

SLIDE 45

Vă mai aduceți aminte, din cursul precedent, cum arăta spectrul după demodulația semnalului, pentru intervalul cuprins între $-\pi$ și π . Ceea ce era important pentru noi, și am remarcat atunci, a fost faptul că se poate recupera integral semnalul inițial. Dar, apăreau în spectru și două componente suplimentare, de înaltă frecvență. Acum știm să le eliminăm.

Cum procedăm?



46

SLIDE 46

Vom elimina componentele false, cu ușurință, folosind un filtru trece-jos. Folosim un filtru trece-jos, cu o frecvență de tăiere ω_c care este suficient de mare pentru a include semnalul principal, adică semnalul din banda de bază, cum se mai numește, dar și suficient de mic pentru a suprima componentele de înaltă frecvență.

Atunci când facem asta, obținem din nou semnalul original, fără niciun niciun fel de „impurități”.

AM TERMINAT PENTRU ASTĂZI! SĂ TRAGEM CÂTEVA CONCLUZII

47

Am început cursul definind un SDLIT, prin evidențierea proprietăților sale:

- liniaritatea: ieșirea în cazul unei combinații liniare de intrări este egală cu combinația liniară a ieșirilor;
- invarianță în timp: sistemul se comportă exact la fel, independent de momentul în care este pornit.

Am stabilit că SDLIT sunt în întregime caracterizate prin răspunsul lor la impuls (funcția pondere), notat $h[n]$, adică răspunsul lor la secvența delta $\delta[n]$.

Ieșirea unui SDLIT, $y[n]$, poate fi calculată prin convoluția semnalului de intrare $x[n]$, cu răspunsul la impuls, $h[n]$.

Am stabilit un rezultat remarcabil: exponențialele complexe sunt secvențe proprii ale SDLIT. Aceasta înseamnă că atunci când introducem o exponențială complexă, la o frecvență dată, într-un SDLIT, ceea ce obținem la ieșire este o exponențială complexă de aceeași frecvență și doar amplitudinea și/sau faza sa s-ar fi putut schimba.

O consecință directă a acestei proprietăți este așa-numita teoremă de convoluție: pentru orice intrare $x[n]$, DTFT-ul semnalului de ieșire este egal cu produsul dintre DTFT-ul intrării și DTFT-ul răspunsului la impuls. Acesta din urmă se numește răspunsul în frecvență al unui SDLIT.

Pentru a înțelege comportamentul SDLIT prin răspunsul în frecvență, este de obicei realizată descompunerea în

- amplitudine: aflăm unde se produce amplificare/atenuare
- fază: dă informații cu privire la întârziere și schimbarea de formă.

CONTINUARE CONCLUZII... ȘI GATA

48

Am introdus noțiunea de filtru numeric (digital, discret).

Am dat o clasificare a filtrelor pe baza răspunsului la impuls: cu răspuns finit la impuls (FIR) și cu răspuns infinit la impuls (IIR). Am discutat despre o proprietate importantă a filtrelor, în domeniul timpului: cauzalitatea (răspunsul la impuls este zero pentru valori negative ale lui n).

Am definit, de asemenea, noțiunea de BIBO - stabilitate (Bounded Input Bounded Output): ieșire mărginită când intrarea este mărginită.

Am văzut că o condiție necesară și suficientă pentru stabilitate este ca răspunsul la impuls să fie absolut sumabil. În consecință, filtrele FIR sunt întotdeauna stabile.

Am continuat cu o clasificare a filtrelor bazată pe răspunsul în frecvență, funcție de mărimea amplitudinii acestuia: filtrele trece-jos, care lasă frecvențele joase să treacă și ucid frecvențele înalte, opusul acestora - filtrele trece-sus și filtrele trece-bandă, care lasă să treacă o anumită gamă de frecvențe și au amplitudine constantă pe toate frecvențele.

Am studiat filtrul trece-jos ideal. Răspunsul său în frecvență este caracterizat de:

- o bandă de trecere centrată în jurul zero cu frecvența de tăiere ω_c
- o atenuare infinită în banda de oprire
- fără termen de fază (alias fără întârziere).

Răspunsul său corespunzător la impuls este o funcție sinc al cărei suport are lungime infinită, către minus infinit și plus infinit. Din această cauză, nu este posibilă implementarea acestui filtru cu un număr finit de operații. Acesta este motivul pentru care numim acest filtru ideal și vom încerca să obținem aproximări cât mai bune.

În plus, din filtrele ideale trece-jos, am derivat filtre ideale de tip trecere-sus și trece-bandă.

Am încheiat prin revizuirea problemei demodulării sinusoidale.