

CURSUL 8

FUNCȚIA GENERALIZATĂ (DISTRIBUȚIA) DIRAC DELTA.

DTFT ȘI MODULAȚIA SINUSOIDALĂ.

SUMAR AL REZULTATELOR OBTINUTE PENTRU **DTFT**, **DFS** ȘI **DFT**.

TRANSFORMATĂ FOURIER RAPIDĂ (**TFR**) – FAST FOURIER TRANSFORM (**FFT**):

- Matrici DFT pentru cazuri particulare ale lui N
 - *Divide et Impera*
 - Decimare în timp (DIT)
 - Factorizare matrici DFT
 - Diagramă- fluture
- Analiza reducerii numărului operațiilor efectuate

1

SLIDE 1

Iată care este conținutul cursului de astăzi. În prima parte vom continua și vom finaliza tot ce ține de DTFT, iar în partea a doua ne vom ocupa de transformata Fourier rapidă.

DTFT vs DFT

În anumite privințe, se aseamănă:

- ▶ $\text{DFT} \{\delta[n]\} = 1$
- ▶ $\text{DTFT} \{\delta[n]\} = \langle e^{j\omega n}, \delta[n] \rangle = 1$

În altele, nu:

- ▶ $\text{DFT} \{1\} = N\delta[k]$
- ▶ $\text{DTFT} \{1\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-j\omega n} = ?$

PROBLEMĂ: Multe secvențe (șiruri) nu sunt de pătrat sumabil, pentru a putea fi abordate cu ajutorul DTFT!

2

SLIDE 2

Analizând proprietățile DTFT evidențiate anterior, s-ar părea că avem de-a face cu o schimbare de bază de la spațiul secvențelor discrete de pătrat sumabil la spațiul funcțiilor periodice de pătrat integrabil.

Cu alte cuvinte, s-ar părea că putem privi DTFT ca pe o extensie a formalismului DFT și, într-adevăr, unele lucruri chiar ne fac să credem că așa este.

De exemplu, dacă luăm DFT-ul secvenței discrete $\delta[n]$, ne amintim că el este 1.

În mod similar, DTFT-ul pentru secvența discretă $\delta[n]$, exprimat ca produs scalar între funcția pseudo-bazei și secvența $\delta[n]$, este de asemenea 1.

Cu toate acestea, unele lucruri nu funcționează așa cum ne-am aștepta.

Spre exemplu, DFT-ul constantei 1 este corect definit și este egal cu $N\delta[k]$, dar DTFT-ul lui 1, exprimat conform definiției, ridică probleme deoarece, pentru $\omega = 0$, spre exemplu, fiecare exponențială complexă devine 1, iar suma „explodează” (diverge).

Există prea multe secvențe discrete interesante care nu sunt de pătrat sumabil și, desigur, constanta 1 este una dintre ele.

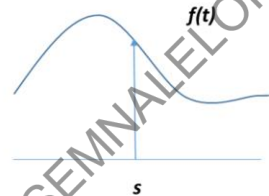
Funcția generalizată (distribuția) Dirac-delta

Este definită prin relația:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-s)f(t)dt = f(s)$$

$s \in \mathbb{R}$

valabilă pentru toate funcțiile reale, de variabilă $t \in \mathbb{R}$



3

SLIDE 3

Pentru a putea continua să folosim paradigma schimbării bazei, chiar și pentru secvențe care nu sunt de pătrat sumabil, vom introduce un artificiu matematic denumit: *funcția generalizată Dirac-delta*.

Acest termen de sub integrală, care este indicat aici prin simbolul delta, dar care nu este secvența delta utilizată până acum, ci un delta având ca argument o variabilă reală, se definește prin această proprietate denumită „sifting” (cernere, selecție), care are exprimarea din slide. Respectiv, dacă luăm o funcție delta și o centrăm în s , unde s este o variabilă în $\mathbb{R}$, iar o apoi înmulțim cu o funcție f de variabilă reală t , prin integrarea de la $-\infty$ la ∞ se va obține valoarea lui f în punctul s .

Grafic, dacă reprezentăm funcția generalizată delta ca pe o săgeată îndreptată în sus, centrată în s , și o înmulțim cu orice funcție de variabilă reală t , prin integrarea de la $-\infty$ la ∞ vom obține valoarea funcției f în s .

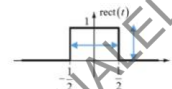
INTUITIV:

Vom considera o familie de funcții de localizare $r_k(t)$, cu $k \in \mathbb{N}$ și $t \in \mathbb{R}$ pentru care:

- Suportul este invers proporțional cu valoarea lui k
- Aria (adică integrala de la $-\infty$ la $+\infty$) este o constantă

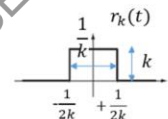
Utilizând funcția:

$$\text{rect}(t) = \begin{cases} 1 & \text{pt } |t| < 1/2 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$



putem construi familia de funcții de localizare: $r_k(t) = k \text{rect}(kt)$, care sunt

- egale cu k pe întreg intervalul suport $\left[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right]$, ce are lățimea egală cu $\frac{1}{k}$
- de arie egală cu 1: (lățime) $\times$ (înălțime) $= \frac{1}{k} \cdot k = 1$

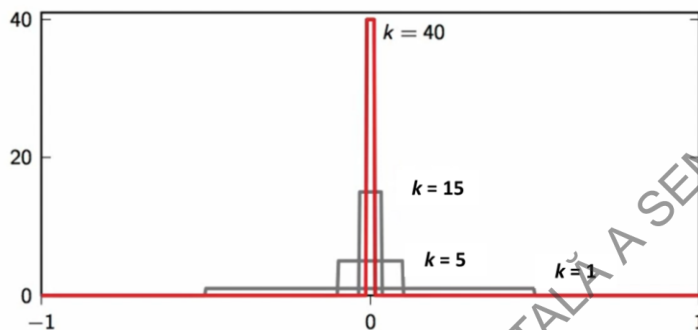


4

SLIDE 4

Pentru a înțelege proprietățile acestei funcții generalizate Dirac-delta, vom considera o familie de funcții de localizare, exact așa cum sunt ele definite în slide. Haideți să detaliem urmărind conținutul slide-ului.

Reprezentarea familiei de funcții de localizare $r_k(t)$



5

SLIDE 5

Reprezentăm câteva dintre funcțiile din această familie, pentru valori arbitrare ale lui k .

Observăm rezultatele obținute pentru $k=1$.

Pentru $k=5$, observați că lățimea suportului s-a micșorat la $1/5$, dar înălțimea lui a crescut la 5.

Procesul continuă, după cum observăm din reprezentările pentru $k=15$ și $k=40$, către un k infinit.

Folosind teorema valorii de medie, obținem:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} r_k(t)f(t)dt &= k \int_{-1/2k}^{1/2k} f(t)dt \\ &= f(\gamma)|_{\gamma \in [-1/2k, 1/2k]}\end{aligned}$$

și prin urmare:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} r_k(t)f(t)dt = f(0)$$

6

SLIDE 6

Haideți să vedem dacă proprietatea de „sifting”, pe care ne dorim să o aibă funcția generalizată Dirac-delta, este prezentă în cazul funcțiilor de localizare $r_k(t)$.

Verificarea o vom face pentru $s = 0$.

Cum valoarea $r_k(t)$ este nenulă, fiind egală cu k , numai pe intervalul suport $\left[-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right]$, integrala primește aceste limite de integrare, deoarece în rest produsul de sub integrală este 0. Constanta k iese în afara integralei, iar integralei rămase îi aplicăm *teorema de medie* care ne asigură de existența aceluși punct γ (gamma), a cărui localizare în interval, însă, nu o cunoaștem exact. Nici nu ne interesează, atâta timp cât pentru k tinzând la infinit intervalul tinde să devină chiar punctul 0, iar $f(\gamma)$ devine $f(0)$. Așadar, chiar s-a „cernut”, s-a „selectat”, valoarea lui $f(0)$, exact cum ne așteptam.

Simbolul funcției generalizate Dirac-delta: $\delta(t)$

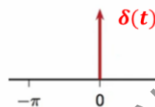
În loc să scriem:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} r_k(t-s)f(t)dt$$

vom scrie:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-s)f(t)dt.$$

ca și cum: $\lim_{k \rightarrow \infty} r_k(t) = \delta(t)$,



7

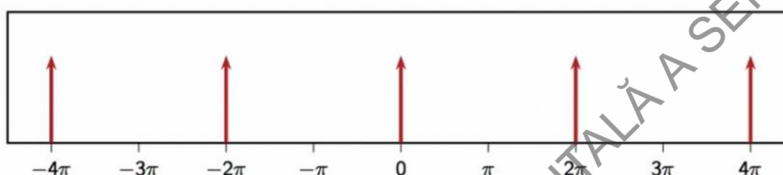
SLIDE 7

Folosim simbolul delta ca pe o prescurtare pentru această limită care ne apare aici. Figurarea grafică utilizată, extrem de sugestivă, va fi cea sub formă de săgeată.

„Tren de impulsuri” Dirac-delta

Un artificio matematic pe care îl vom utiliza în cazul funcțiilor 2π – periodice:

$$\tilde{\delta}(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - 2\pi k)$$



8

SLIDE 8

Cum toate spectrele sunt 2π - periodice, dacă vrem să folosim acest instrument matematic nou introdus și în domeniul frecvenței, trebuie să-l periodizăm.

Versiunea periodică a funcției generalizate Dirac-delta se numește „tren de impulsuri” și este construită prin plasarea de copii ale funcției delta la fiecare 2π și prin scalarea întregului semnal cu 2π .

Am acoperit, cu ajutorul funcției generalizate Dirac-delta, cazul lui DTFT {1}?

$$\begin{aligned}\text{IDTFT} \{ \tilde{\delta}(\omega) \} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{\delta}(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\omega) e^{j\omega n} d\omega \\ &= e^{j\omega n} \Big|_{\omega=0} \\ &= 1\end{aligned}$$

Prin urmare:

$$\text{DTFT} \{1\} = \tilde{\delta}(\omega)$$

9

SLIDE 9

Să verificăm acum dacă am înlăturat din neajunsurile constatate la începutul discuțiilor noastre cu privire la DTFT, comparativ cu DFT.

Să luăm în considerare inversa transformării Fourier pentru trenul de impulsuri $\tilde{\delta}(\omega)$. Aplicăm definiția și obținem prima egalitate.

Primul lucru de remarcat este că, din moment ce delta periodizată este scalată de un factor 2π , acesta se va simplifica cu factorul de normalizare din fața integralei. Cum integrăm doar între $-\pi$ și π , în acest interval avem un singur impuls și, prin urmare, putem renunța la tilda care simboliza periodicitatea.

În baza proprietății de „sifting” a lui Dirac-delta, această integrală va cerna doar valoarea din 0 a funcției $e^{j\omega n}$ (care este o funcție de variabilă reală ω), obținându-se așadar valoarea 1.

Acest lucru este similar, oarecum, cu faptul că în cazul DFT aveam: $\text{IDFT} \{N\delta[k]\} = 1$. Așadar paralelismul cu DFT funcționează acum.

Concluzionând: $\text{DTFT}\{1\} = \tilde{\delta}(\omega)$

Are sens, în noile condiții, calculul efectiv al lui DTFT {1} ?

$$\text{DTFT}\{1\} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-j\omega n} = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=-k}^k e^{-j\omega n} = \lim_{k \rightarrow \infty} S_k(\omega)$$

unde am notat *șirul sumelor parțiale*:

$$S_k(\omega) = \sum_{n=-k}^k e^{-j\omega n}$$

$|S_k(\omega)|$ se reprezintă grafic, pentru valori diferite ale lui k , după cum urmează:

10

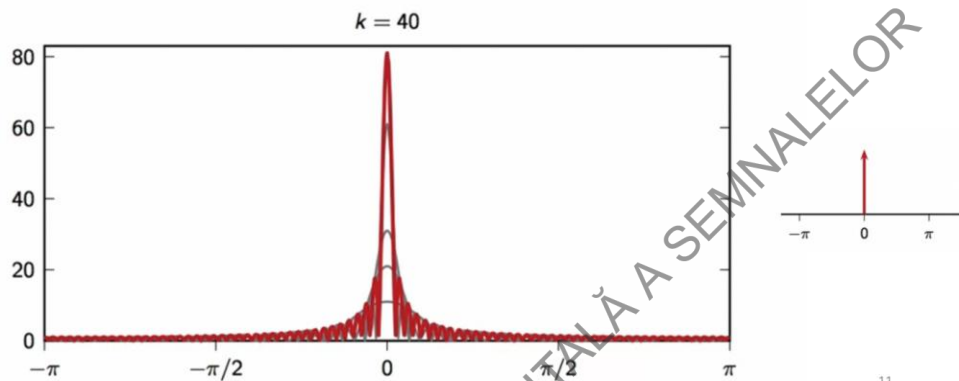
SLIDE 10

Să verificăm dacă $\text{DTFT}\{1\}$ poate fi calculat direct. Parcurgem pașii conform slide-ului.

Pe măsură ce k merge către infinit, $S_k(\omega)$ ar trebui să convergă către 1.

Dacă vom reprezenta valoarea absolută a acestor sume $|S_k(\omega)|$ pentru valori crescătoare ale lui k , rezultatul așteptat se va confirma. Haideți să vedem.

Reprezentare $|S_k(\omega)|$



SLIDE 11

Priviți ce se obține. Pe măsură ce creștem indicele k , vedem că această familie de sume parțiale arată ca o familie de funcții de localizare. Suportul se îngustează, dar aria zonei rămâne constantă. Deci chiar are sens să spunem că, la limită, aceste sume parțiale vor converge către funcția generalizată Dirac-delta.

CONCLUZIONÂND:

$$\text{DTFT}\{1\} = \tilde{\delta}(\omega)$$

Folosind același procedeu, ca mai înainte, vom obține:

$$\text{IDTFT}\{\tilde{\delta}(\omega - \omega_0)\} = e^{j\omega_0 n}$$

Prin urmare:

- ▶ $\text{DTFT}\{1\} = \tilde{\delta}(\omega)$
- ▶ $\text{DTFT}\{e^{j\omega_0 n}\} = \tilde{\delta}(\omega - \omega_0)$
- ▶ $\text{DTFT}\{\cos \omega_0 n\} = [\tilde{\delta}(\omega - \omega_0) + \tilde{\delta}(\omega + \omega_0)]/2$
- ▶ $\text{DTFT}\{\sin \omega_0 n\} = -j[\tilde{\delta}(\omega - \omega_0) - \tilde{\delta}(\omega + \omega_0)]/2$

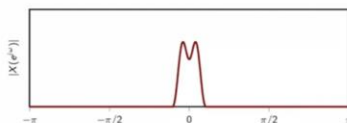
12

SLIDE 12

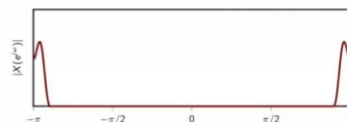
Câteva concluzii, foarte importante în aplicații.

O NOUĂ CLASIFICARE A SEMNALELOR

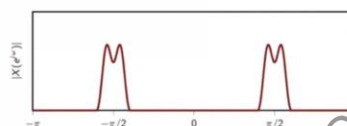
Semnal trece-jos
(lowpass sau baseband)



Semnal trece-sus
(highpass)



Semnal trece-bandă
(bandpass)



13

SLIDE 13

Există trei categorii mari de semnale, funcție de regiunea din domeniul frecvență în care energia spectrală este concentrată în cea mai mare parte. Prima categorie include *semnalele trece-jos (lowpass)*, uneori numite și *semnale în banda de bază (baseband)*.

Avem apoi *semnalele trece-sus (highpass)*, la care conținutul este în mare parte în jurul frecvențelor înalte, iar între cele două categorii se plasează cea a *semnalelor trece-bandă (bandpass)*.

Există, în mod evident, diferențe între semnalele în timp discret și cele în timp continuu, dar această clasificare poate fi utilizată în ambele cazuri.

Să ne uităm la spectrul din cazul semnalelor trece-jos (lowpass). După cum puteți vedea, energia este concentrată în cea mai mare parte în jurul originii 0 și nu există energie în rest.

La spectrul semnalului trece-sus (highpass), energia este concentrată în jurul lui $-\pi$ și π și în rest nu există energie.

Și, în sfârșit, în cazul spectrului semnalului trece-bandă (bandpass), energia este concentrată în jurul lui $-\pi/2$ și $\pi/2$.

Deoarece am considerat un exemplu de spectru real, el posedă proprietatea de simetrie, despre care am discutat anterior.

DTFT ȘI MODULAȚIA SINUSOIDALĂ

$$\begin{aligned}\text{DTFT} \{x[n] \cos(\omega_c n)\} &= \text{DTFT} \left\{ \frac{1}{2} e^{j\omega_c n} x[n] + \frac{1}{2} e^{-j\omega_c n} x[n] \right\} \\ &= \frac{1}{2} [X(e^{j(\omega - \omega_c)}) + X(e^{j(\omega + \omega_c)})]\end{aligned}$$

- Usual, semnalul $x[n]$ este unul trece-jos
- Am notat cu ω_c frecvența purtătoare (*carrier frequency*)
- Am ținut cont de liniaritatea transformării și de faptul că

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

14

SLIDE 14

Modulația este o metodă prin care deplasăm conținutul spectral al unui semnal în domeniul frecvență.

De exemplu, putem modula un semnal trece-jos (lowpass), cum este vocea de exemplu, într-un semnal trece-bandă (bandpass), cum ar fi un semnal radio AM.

Rețineți că modulația este un proces esențial în sistemele de comunicații.

Un semnal modulat poate fi apoi demodulat, ajungându-se din nou la poziția inițială din domeniul frecvență.

Luăm, acum, în considerare modulația sinusoidală și vom utiliza DTFT pentru a vedea ce se întâmplă în domeniul frecvență.

Semnalul util, de obicei unul trece-jos (lowpass), după cum am spus, este $x[n]$, iar purtătoarea este $\cos(\omega_c n)$, unde am notat cu ω_c frecvența purtătoare.

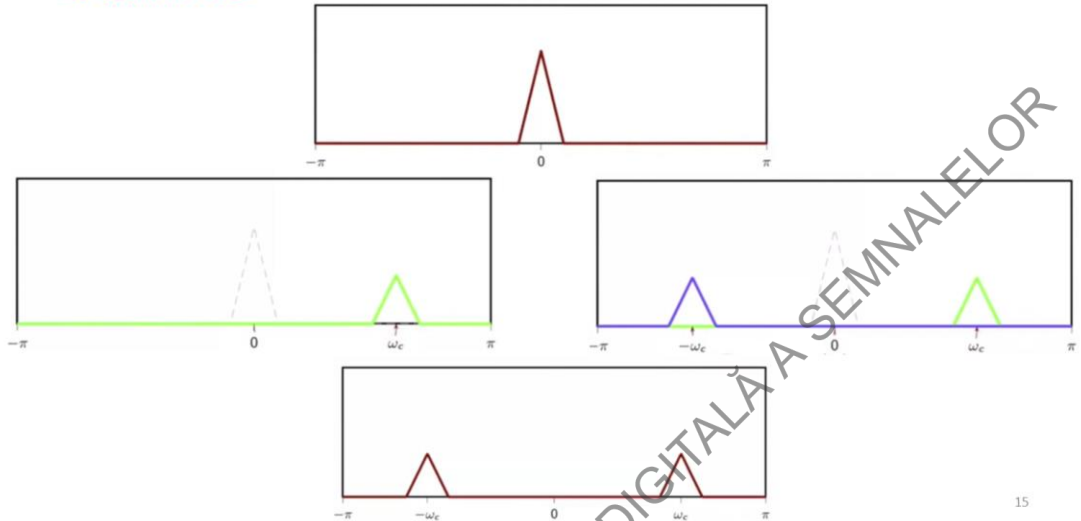
Prima egalitate se obține ținând cont de formula lui Euler pentru funcția cosinus.

Folosind liniaritatea transformării și formula DTFT în cazul *deplasării*:

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j(\omega - \omega_0)}),$$

vom obținem următoarea egalitate din slide.

EXEMPLU



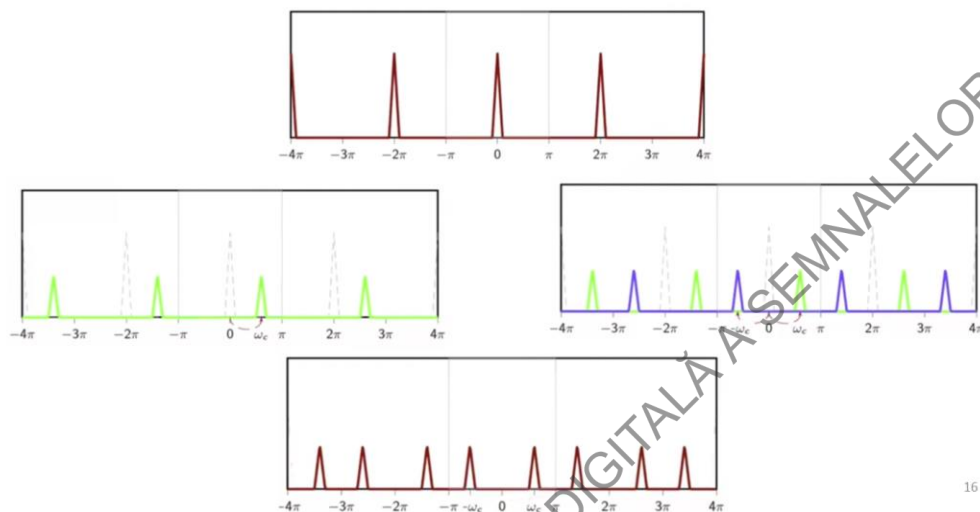
SLIDE 15

Să ilustrăm acum tot ceea ce se întâmplă cu spectrul semnalului util, în urma modulării, în domeniul frecvență.

Așadar, începem cu un spectru în preajma originii, respectiv acest spectru ilustrat simbolic sub formă de triunghi. El corespunde semnalului inițial trece-jos (lowpass), pe care îl modulăm.

În urma modulației, spectrul se transformă astfel: se înmulțește cu $1/2$ și se mută în jurul ω_c , ceea ce am colorat în verde, respectiv în jurul lui $-\omega_c$, ceea ce am colorat în albastru. În final, după modulare, se obține prin suprapunerea acestora spectrul colorat de noi în roșu.

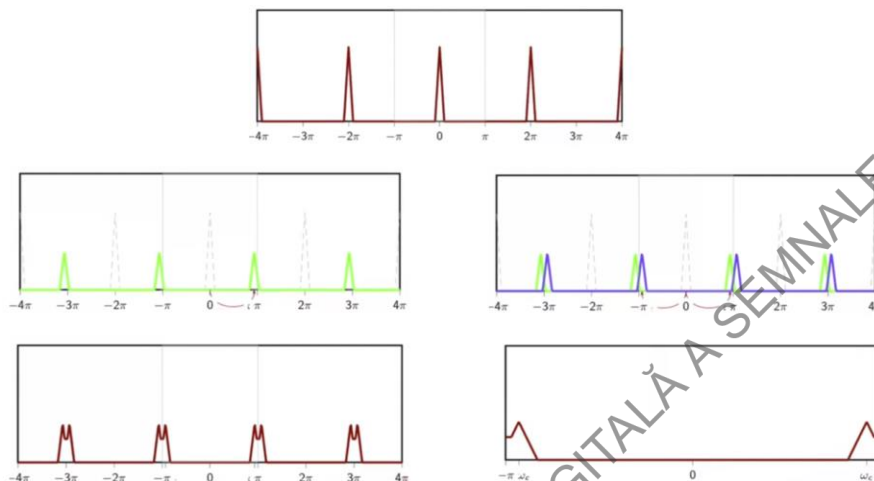
Să nu uităm de periodicitatea spectrului!



SLIDE 16

Știm, însă, că spectrul este unul 2π -periodic. Haideți, prin urmare, să ilustrăm tot ce se întâmplă, însă pe câteva perioade (aici de la -4π la $+4\pi$).

Atenție la alegerea frecvenței ω_c



17

SLIDE 17

Trebuie să fim foarte atenți, însă, cât creștem frecvența de modulație și vom urmări ce se poate întâmpla dacă aceasta depășește o anumită valoare.

Haideți să vedem cum stau lucrurile dacă ω_c se apropie prea mult de π (obținem ce am colorat în verde), respectiv dacă $-\omega_c$ se apropie prea mult de $-\pi$ (obținem ce am colorat în albastru). Spectrul care se obține în final (colorat în roșu) nu este chiar ceea ce ne așteptam. Acel spectru inițial, sub formă triunghiulară, nu mai există, și nu vom avea cum să-l mai recuperăm.

Aplicații ale modulației sinusoidale

- Vocea și muzica fac parte din categoria semnalelor trece-jos
- Pe canalele radio se lucrează cu semnale trece-bandă, în zona frecvențelor mai înalte
- Prin modulație se trece în banda de transmisie dorită
- Se revine, prin demodulație, la recepție

18

SLIDE 18

Vă propun să fixăm câteva lucruri cu privire la modulația sinusoidală.

Astfel, vocea și muzica sunt în general semnale trece-jos (lowpass). Frecvențele înalte oricum nu pot fi percepute de sistemul auditiv uman.

Semnalele radio, pe de altă parte, sunt semnale trece-bandă (bandpass). Se lucrează la frecvențe mai mari deoarece, în caz contrar, am avea interferențe importante și pierderi semnificative la transmisie.

Modulația este practic procesul de aducere a unui semnal în banda de transmisie dorită. De exemplu, un semnal vocal va trece în banda de transmisie pentru transmisia radio.

Demodulația este inversul (sau dualul) modulației și va readuce semnalul în zona frecvențelor joase.

DTFT și demodulația sinusoidală

$$y[n] = x[n] \cos(\omega_c n) \quad Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [X(e^{j(\omega - \omega_c)}) + X(e^{j(\omega + \omega_c)})]$$

$$\begin{aligned} \text{DTFT} \{y[n] \cdot 2 \cos(\omega_c n)\} &= Y(e^{j(\omega - \omega_c)}) + Y(e^{j(\omega + \omega_c)}) \\ &= \frac{1}{2} [X(e^{j(\omega - 2\omega_c)}) + X(e^{j\omega}) + X(e^{j\omega}) + X(e^{j(\omega + 2\omega_c)})] \\ &= X(e^{j\omega}) + \frac{1}{2} [X(e^{j(\omega - 2\omega_c)}) + X(e^{j(\omega + 2\omega_c)})] \end{aligned}$$

19

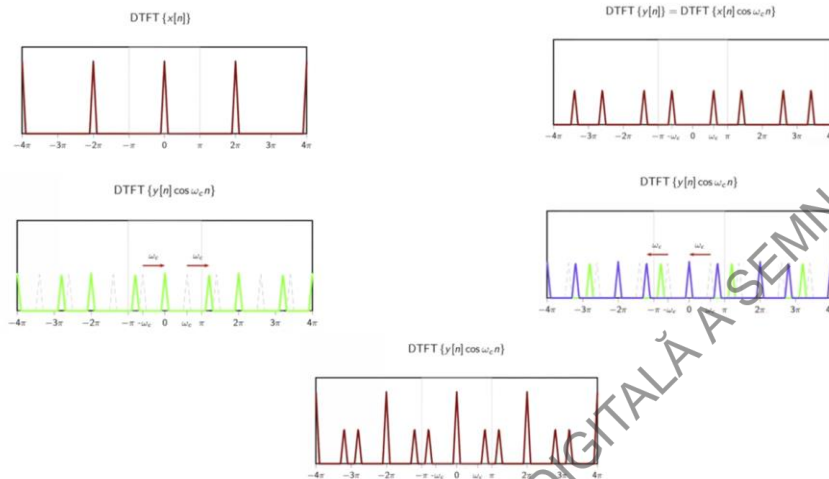
SLIDE 19

Să urmărim ce se întâmplă în cazul procesului dual, la demodulația semnalului.

Aceasta presupune, pur și simplu, înmulțirea semnalului de la recepție $y[n]$, din nou, cu același semnal purtător.

Să urmărim ce se întâmplă în acest caz și cum se reflectă noua înmulțire în expresia DTFT-ului. Folosim din nou formula lui Euler pentru funcția cosinus, iar apoi ne folosim de expresia lui $Y(e^{j\omega})$. Obținem rezultatul din slide. Observăm că îl regăsim aici pe $X(e^{j\omega})$, care ne interesează de fapt, dar și două versiuni modulate ale acestuia, la $-2\omega_c$ și la $2\omega_c$.

Cum se reflectă totul la nivelul spectrului?

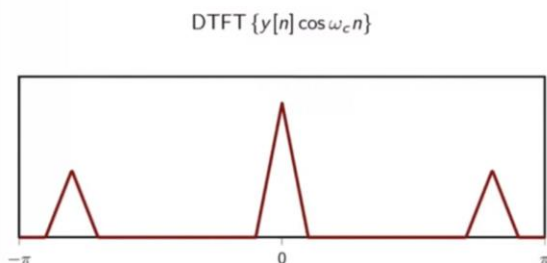


20

SLIDE 20

Să ilustrăm acum tot ceea ce se întâmplă în domeniul frecvență, în urma modulării și a demodulării.

Reprezentarea DTFT, pentru semnalul demodulat, pe intervalul $[-\pi, \pi]$



- După transmitere, putem recupera integral semnalul inițial
- În spectru apar și cele două componente suplimentare, de înaltă frecvență, care trebuie eliminate (suprimate)

21

SLIDE 21

Iată cum arată spectrul după demodulația semnalului, pentru intervalul cuprins între $-\pi$ și π . Ceea ce este important este faptul că se poate recupera integral semnalul inițial.

Ajunși fiind în acest punct, vom face câte un sumar al principalelor rezultate ce țin de DTFT, DFS și DFT.

DTFT - SUMAR AL REZULTATELOR IMPORTANTE

Utilizare semnale discrete de lungime infinită: $\{x[n] \in \ell_2(\mathbb{Z})\}$

Formulă analiză
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

Formulă sinteză
$$x[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$$

Simetrie
$$x[-n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{-j\omega})$$

$$x^*[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X^*(e^{-j\omega})$$

Deplasare
$$x[n - n_0] \xrightarrow{\text{DTFT}} e^{-j\omega n_0} X(e^{j\omega})$$

$$e^{j\omega_0 n} x[n] \xrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j(\omega - \omega_0)})$$

Relația lui Parseval
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

Perechi relevante: $x[n] \leftrightarrow X(e^{j\omega})$

$$x[n] = \delta[n - k] \quad X(e^{j\omega}) = e^{-j\omega k}$$

$$x[n] = 1 \quad X(e^{j\omega}) = \tilde{\delta}(\omega)$$

$$x[n] = u[n] \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \frac{1}{2} \tilde{\delta}(\omega)$$

$$x[n] = a^n u[n], \quad |a| < 1 \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$x[n] = e^{j\omega_0 n} \quad X(e^{j\omega}) = \tilde{\delta}(\omega - \omega_0)$$

$$x[n] = \cos(\omega_0 n + \phi) \quad X(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} [e^{j\phi} \tilde{\delta}(\omega - \omega_0) + e^{-j\phi} \tilde{\delta}(\omega + \omega_0)]$$

$$x[n] = \sin(\omega_0 n + \phi) \quad X(e^{j\omega}) = \frac{-j}{2} [e^{j\phi} \tilde{\delta}(\omega - \omega_0) - e^{-j\phi} \tilde{\delta}(\omega + \omega_0)]$$

$$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pt } 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases} \quad X(e^{j\omega}) = \frac{\sin((N/2)\omega)}{\sin(\omega/2)} e^{-j\frac{N-1}{2}\omega}$$

22

SLIDE 22 (DTFT)

DFS - SUMAR AL REZULTATELOR IMPORTANTE

Utilizare	semnale periodice $(\tilde{x}[n] \in \mathbb{C}^N)$	
Formulă analiză	$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] W_N^{nk}, \quad k = 0, \dots, N-1$	
Formulă sinteză	$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] W_N^{-nk}, \quad n = 0, \dots, N-1$	cu notația:
Simetrie	$\tilde{x}[-n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[-k]$ $\tilde{x}^*[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}^*[-k]$	$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$
Deplasare	$\tilde{x}[(n - n_0)] \xleftrightarrow{\text{DFS}} W_N^{kn_0} \tilde{X}[k]$ $W_N^{-nk_0} \tilde{x}[n] \xleftrightarrow{\text{DFS}} \tilde{X}[(k - k_0)]$	
Relația lui Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n] ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k] ^2$	

23

SLIDE 23 (DFS)

DFT - SUMAR AL REZULTATELOR IMPORTANTE

Utilizare		Perechi relevante: $x[n] \leftrightarrow X[k]$	
	semnale discrete de lungime finită ($x[n] \in \mathbb{C}^N$)		($n, k = 0, 1, \dots, N-1$)
Formulă analiză	$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W_N^{nk}, \quad k = 0, \dots, N-1$	$x[n] = \delta[n-M]$	$X[k] = e^{-j\frac{2\pi}{N}Mk}$
Formulă sinteză	$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] W_N^{-nk}, \quad n = 0, \dots, N-1$	$x[n] = 1$	$X[k] = N\delta[k]$
Simetrie	$x[-n \bmod N] \xrightarrow{\text{DFT}} X[-k \bmod N]$ $x^*[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X^*[-k \bmod N]$	$x[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}Ln}$	$X[k] = N\delta[k-L]$
Deplasare	$x[(n-n_0) \bmod N] \xrightarrow{\text{DFT}} W_N^{kn_0} X[k]$ $W_N^{nk_0} x[n] \xrightarrow{\text{DFT}} X[(k-k_0) \bmod N]$	$x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{N}Ln + \phi\right)$ $x[n] = \sin\left(\frac{2\pi}{N}Ln + \phi\right)$	$X[k] = \frac{N}{2} [e^{j\phi} \delta[k-L] + e^{-j\phi} \delta[k-N+L]]$ $X[k] = \frac{-jN}{2} [e^{j\phi} \delta[k-L] - e^{-j\phi} \delta[k-N+L]]$
Relația lui Parseval	$\sum_{n=0}^{N-1} x[n] ^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] ^2$	$x[n] = \begin{cases} 1 & \text{pt } n \leq M-1 \\ 0 & \text{pt } M \leq n \leq N-1 \end{cases}$	$X[k] = \frac{\sin((\pi/N)Mk)}{\sin((\pi/N)k)} e^{-j\frac{\pi}{N}(M-1)k}$

cu notația:

$$W_N = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

24

SLIDE 24 (DFT)

FFT (The Fast Fourier Transform) – Transformata Fourier rapidă (TFR)

25

SLIDE 25

Transformarea Fourier rapidă (TFR) – în engleză The Fast Fourier Transform (FFT), nu este un tip nou de transformată Fourier. Ea este doar o tehnică algoritmică rapidă pentru calculul numeric al DFT în cazul un set finit de date. În general, calculul direct al DFT în cazul unui semnal de lungime N necesită un număr de operații aritmetice de ordinul N^2 , asta în timp ce un algoritm FFT bun, vom vedea, necesită un număr de operații de ordinul $N \log_2 N$.

Disponibilitatea algoritmilor DFT rapizi a fost elementul de schimbare fundamentală din istoria procesării semnalelor digitale, permițând rezolvarea unor aplicații din ce în ce mai complexe, cu utilizarea unui hardware puțin costisitor.

Ce facem mai departe?

- Puțină istorie. De la Gauss, la algoritmi FFT din zilele noastre.
- Exemple de matrici DFT
- Algoritmul FFT în varianta Cooley-Tukey
- Decimare în timp
- Concluzii

26

SLIDE 26

Trecem rapid peste istoria acestui algoritm. Ea merge în trecut destul de departe.

Marele matematician Gauss este cel care a inventat principiul transformării Fourier rapide (1805), chiar înainte ca Fourier să definească transformarea ce îi poartă numele (1807). Apoi, mulți oameni de știință, de-a lungul timpului, au fost nevoiți să calculeze serii Fourier, petrecând timp îndelungat pentru a dezvolta diverse artificii matematice sau chiar algoritmi.

În 1958, un statistician englez, Good, a venit cu un algoritm, care este încă folosit, dar nu este cel mai popular.

Cel mai popular algoritm a fost inventat în 1965, de Cooley și Tukey. Acesta este o redescoperire a algoritmului de transformare Fourier rapidă pentru cazul N , atunci când N este o putere a unui număr prim. De obicei N este o putere a lui 2 sau a lui 3. După aceasta Winograd a fost cel care a combinat metodele, pentru a oferi algoritmi FFT cei mai eficienți.

Vom analiza, în continuare, câteva mici exemple, doar pentru a înțelege ce se întâmplă prin utilizarea metodei.

Urmează să prezentăm cel mai celebru algoritm utilizat în prezent, respectiv Cooley - Tukey FFT.

Dăm un exemplu detaliat cu așa-numitul FFT cu decimare în timp, pentru lungimi de 2^K , și apoi concluzionăm.

Să ne aducem aminte: DFT sub forma matriceală

Dacă notăm $W_N \stackrel{\text{def}}{=} W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ (folosim W când N se subînțelege din context), atunci matricea schimbării bazei este $\mathbf{W}$, adică matricea cu elementele de forma $W_N^{p \cdot q}$, unde p este numărul liniei și q cel al coloanei, matrice dată prin:

$$\mathbf{W} = \begin{matrix} \text{Coloana} & 0 & 1 & 2 & 3 & \dots & (N-1) \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & W^{3(N-1)} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix} \end{matrix} \begin{matrix} \text{Linia} \\ 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ (N-1) \end{matrix}$$

$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ - formula pentru **analiză**

$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^H \mathbf{X}$ - formula pentru **sinteză**

27

SLIDE 27

Am văzut că, pentru a sublinia că DFT este doar o operație de algebră liniară, se poate exprima schimbarea bazei și în notație matriceală.

Deci, dacă definim $W_N \stackrel{\text{def}}{=} W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ (cu notația W folosită numai atunci când N este evident din context), putem scrie această matrice $\mathbf{W}$, care conține elementele (aflate la intersecția liniei p cu coloana q , notate $W_{p,q}$):

$$W_{p,q} = W_N^{p \cdot q} = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot p \cdot q}, \text{ cu: } p, q = 0, 1, \dots, (N-1)$$

Cu această notație *formula de analiză* devine:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}.$$

Deci matricea (vectorul) coeficienților Fourier se obține prin produsul matricei definite de noi, $\mathbf{W}$, cu matricea (vectorul) original $\mathbf{x}$.

Invers, *formula de sinteză* ne va permite să recuperăm vectorul original, exprimat prin matricea $\mathbf{x}$, efectuând produsul dintre hermitianul lui $\mathbf{W}$, respectiv matricea notată cu $\mathbf{W}^H$, cu vectorul coeficienților Fourier, exprimat prin matricea $\mathbf{X}$, totul înmulțindu-se cu raportul de normalizare $1/N$.

Reamintesc faptul că hermitianul $\mathbf{W}^H$ se obține prin conjugarea tuturor elementelor lui $\mathbf{W}$, după care se face transpunerea matricii obținute.

Matricea DFT

- $W_N = W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$
- Puterile lui N pot fi luate *modulo* N , din moment ce $W^N = 1$
- Matricea DFT de dimensiuni $N \times N$ este:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & W^{3(N-1)} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

28

SLIDE 28

Să extragem câteva elemente, din cele amintite anterior, de care o să avem nevoie.

Matricea DFT pentru N=2

$$\mathbf{W}_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{2}} = e^{-j\pi} = \cos(-\pi) + j \sin(-\pi) = (-1) + j \cdot 0 = -1$$

29

SLIDE 29

Să observăm că pentru N=2 obținem $W = -1$, după un calcul foarte simplu, iar matricea devine cea din slide.

Matricea DFT pentru N=3

$$\mathbf{W}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 \\ 1 & W^2 & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 \\ 1 & W^2 & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \frac{-1-j\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+j\sqrt{3}}{2} \\ 1 & \frac{-1+j\sqrt{3}}{2} & \frac{-1-j\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{3}} = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + j \sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right) + j \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{-1-j\sqrt{3}}{2}; \quad W^2 = \left(e^{-j\frac{2\pi}{3}}\right)^2 = \frac{-1+j\sqrt{3}}{2}; \quad W^4 = W^{3 \cdot 1 + 1} = \underbrace{(W^3)^1}_{=1} W;$$

30

SLIDE 30

În cazul N=3, după calcule elementare, obținem matricea din slide, care nu mai arată atât de prietenos precum cea anterioară. Am folosit faptul că $4 \pmod 3 = 1$.

Matricea DFT pentru N=4

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 \\ 1 & W^2 & 1 & W^2 \\ 1 & W^3 & W^2 & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ 1 & -1 & 1 & -j \\ 1 & j & -j & -1 \end{bmatrix}$$

$$W = e^{-j\frac{2\pi}{4}} = \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 0 + j \cdot (-1) = -j; \quad W^2 = (-j)^2 = -1; \quad W^4 = (W^2)^2 = (-1)^2 = 1; \quad W^6 = W^{4+2} = \underbrace{(W^4)}_{=1} W^2; \quad W^9 = W^{4+2+1} = (W^4)^2 W = W;$$

31

SLIDE 31

Pentru N=4, calculele ne conduc la forma matricei din slide.

Folosim direct faptul că:

$4 \pmod{4} = 0$, $6 \pmod{4} = 2$ și $9 \pmod{4} = 1$,

sau procedăm ca în slide.

Este important de remarcat simplitatea matricii obținute și faptul că la utilizarea sa nu vor fi necesare multe operații complicate, ci doar sume, schimbări de semn sau treceri simple din real în complex. Practic, nu sunt necesare înmulțiri!

Matricea DFT pentru N=5

$$\mathbf{W}_5 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 \\ 1 & W^2 & W^4 & W & W^3 \\ 1 & W^3 & W & W^4 & W^2 \\ 1 & W^4 & W^3 & W^2 & W \end{bmatrix}$$

32

SLIDE 32

Pentru N=5 lucrurile se complică.

Aici folosim faptul că.

$6 \pmod{5} = 1$, $8 \pmod{5} = 3$, $9 \pmod{5} = 4$, $12 \pmod{5} = 2$ și $16 \pmod{5} = 1$.

Matricea DFT pentru N=6

$$\mathbf{W}_6 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & W^8 & W^{10} \\ 1 & W^3 & W^6 & W^9 & W^{12} & W^{15} \\ 1 & W^4 & W^8 & W^{12} & W^{16} & W^{20} \\ 1 & W^5 & W^{10} & W^{15} & W^{20} & W^{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & W & W^2 & W^3 & W^4 & W^5 \\ 1 & W^2 & W^4 & 1 & W^2 & W^4 \\ 1 & W^3 & 1 & W^3 & 1 & W^3 \\ 1 & W^4 & W^2 & 1 & W^4 & W^2 \\ 1 & W^5 & W^4 & W^3 & W^2 & W \end{bmatrix}$$

33

SLIDE 33

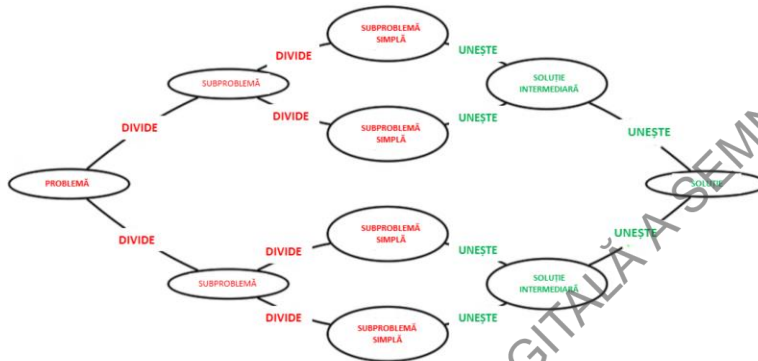
Încă o matrice și gata.

Lucrurile se complică și mai mult, pentru N=6, dar obligatoriu folosim, pentru a le simplifica cât putem, faptul că:

$6 \pmod{6} = 0$, $8 \pmod{6} = 2$, $9 \pmod{6} = 3$, $10 \pmod{6} = 4$, $12 \pmod{6} = 0$, $15 \pmod{6} = 3$, $20 \pmod{6} = 2$ și $25 \pmod{6} = 1$.

Divide et impera (Julius Caesar)

„Divide și stăpânește” este metoda standard de atac care se urmează în vederea dezvoltării unor algoritmi rapizi



34

SLIDE 34

Haideți să vedem care este idea pe care se bazează construcția FFT.

Poate vă este cunoscută zicerea din limba latină „*Divide et impera*”, care îi aparține împăratului Julius Caesar și care se traduce prin „Divide și stăpânește”.

A împărți o problemă complexă în subprobleme (probleme mai simple) și apoi a reuni rezultatele, este sigur o cale mult mai facilă de a ataca rezolvarea problemei.

Urmărim, pentru înțelegere, schema din slide. Este important, însă, să identifici cum anume se poate face *divizarea* în subprobleme, respectiv *unificarea* rezultatelor.

Ceea ce cunoaștem noi este vectorul x de dimensiune N , corespunzător semnalului discret de lungime finită, iar ceea ce trebuie să obținem este tot un vector X de dimensiune N , corespunzător coeficienților DFT.

Divide et impera pentru DFT – un singur pas

Problema de interes: $X = Wx$ - în această formulă, ce conține produsul a două matrici $(N,N) \times (N,1)$, complexitatea calculelor efectuate este de ordin N^2 .

- Dacă se consideră problema ca fiind de dimensiune N , unde N este o putere a lui 2, aceasta implică o complexitate a calculelor de ordin N^2 .
- Se divide problema în două subprobleme de dimensiune $N/2$, ceea ce implică o complexitate de ordin $(N/2)^2 = N^2/4$ pentru fiecare dintre ele.
- Complexitatea continuării din acest punct și a obținerii soluției finale a problemei este N .
- Așadar complexitatea obținerii soluției prin metoda „divide et impera” este de $N^2/2 + N$, după efectuarea unui singur pas precum cel descris anterior.
- Pentru $N \geq 4$, avem: $N^2 \geq N^2/2 + N$, și prin urmare am redus consistent complexitatea rezolvării problemei!

35

SLIDE 35

Dacă nu se identifică un artificiu convenabil, problema de interes are un grad de complexitate, exprimat prin numărul de operații ce trebuiesc efectuate, de ordinul N^2 .

Se consideră cazul în care N este o putere a lui 2.

Să urmărim raționamentul din slide, cu privire la modul în care putem simplifica rezolvarea problemei.

Divide et impera pentru DFT – un singur pas

Grafic:

- Se divide DFT în două părți de dimensiuni $N/2$
- Se calculează fiecare DFT de dimensiune $N/2$
- Se reunesc rezultatele obținute

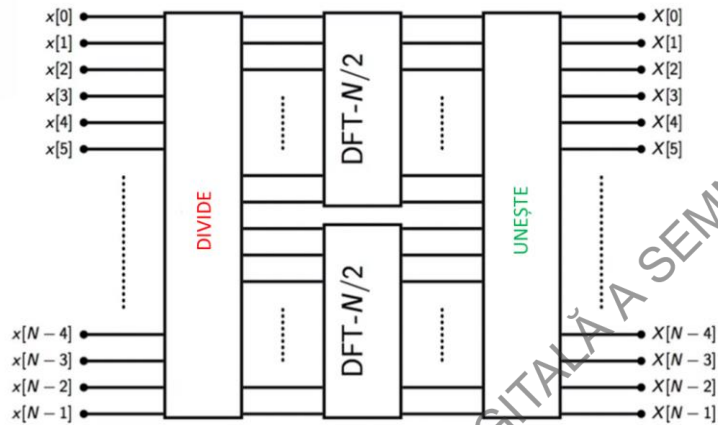
36

SLIDE 36

Sintetizăm etapele de parcurs.

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

Divide et impera pentru DFT – un singur pas



37

SLIDE 37

Iată cum se petrec lucrurile...

Divide et impera pentru DFT – mai mulți pași

Divide et impera se poate aplica repetat!

- Dacă a funcționat o dată bine, sigur funcționează bine în continuare.

Amintiți-vă că: $N = 2^K$.

Mai știți cum l-am putea găsi pe K din această relație? Simplu: $K = \log_2 N$.

- Cele două subprobleme de dimensiune $N/2$ se pot împărți la rândul lor și ajungem la patru probleme de dimensiune $N/4$, ...
- Se poate continua împărțirea în subprobleme, până se ajunge la subprobleme de dimensiune 2, de un număr total de $(\log_2 N - 1) = (K - 1)$ ori
- Avem complexitatea operațiilor pentru fiecare pas egală cu N
- Se obține, așadar, complexitatea totală: $N \log_2 N = NK$
- Pentru $N \geq 4$, rezultatul acesta este mult mai bun decât N^2

38

SLIDE 38

Acum urmează artificiiu magic! Să urmăm...

Divide et impera pentru DFT – mai mulți pași

Grafic:

- Se divide DFT în 2, apoi în 4 și în final în 8 părți, de dimensiuni $N/2$, $N/4$ și respectiv $N/8$
- Se calculează fiecare din cele 8 DFT de dimensiune $N/8$
- Se reunesc succesiv rezultatele obținute în DFT de dimensiuni $N/4$, $N/2$ și N

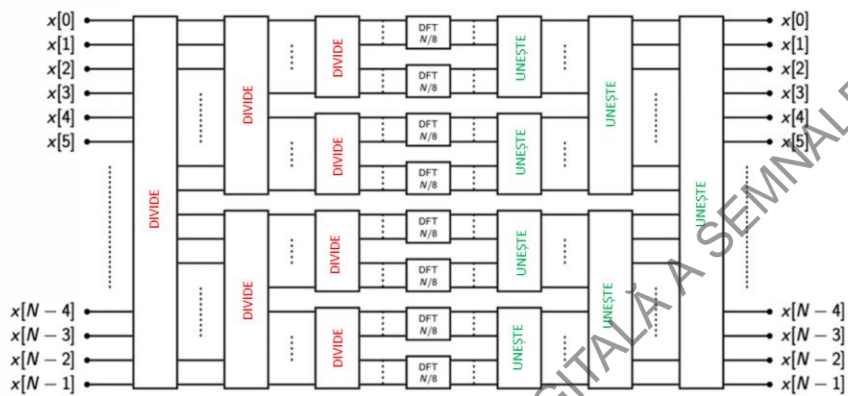
39

SLIDE 39

Să vedem ce vom reprezenta grafic. Lucrăm pe un caz particular, când facem divizarea în 3 pași.

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

Divide et impera pentru DFT – mai mulți pași



40

SLIDE 40

Avem aici reprezentarea pentru cazul discutat anterior, corespunzător unui număr de 3 pași.

Divide et impera pentru DFT – Analiză DIT 1/8

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] W^{nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1, \quad W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$$

- ▶ Împărțim intrările de rang par într-o primă categorie, iar cele de rang impar într-o a doua categorie (realizăm așa numita **DIT- „decimare în timp”**):

$$x[n], n = 0, 1, \dots, N-1 \rightarrow x[2n] \text{ and } x[2n+1], n = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

- ▶ Împărțim ieșirile în două categorii, prima jumătate a lor fiind în prima categorie, iar cea de-a doua jumătate în a doua categorie:

$$X[k], k = 0, 1, \dots, N-1 \rightarrow X[k] \text{ and } X[k + N/2], k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

41

SLIDE 41

A decima = (la romani și în Evul mediu) a pedepsi o armată, o unitate militară, executând pe fiecare al zecelea soldat; a ucide, a omorî în număr mare; a extermina, a masacra. (DEX)

Oarecum impropriu folosit acest termen, ceea ce se definește ca *decimare în timp*, denumire consacrată deja în prelucrarea digitală a semnalelor, se descrie detaliat în slide.

Divide et impera pentru DFT – Analiză DIT 2/8

Se consideră separat intrările pare și cele impare:

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W^{(2n+1)k} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W^{2nk} + \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W^{2nk+k} \\
 &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_{N/2}^{nk} + W^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_{N/2}^{nk} \\
 &= X'_k + W^k X''_k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1
 \end{aligned}$$

Note: Red text in the original image indicates $W^{2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = (W_{N/2})^{nk} = W_{N/2}^{nk}$. Blue arrows point from this text to the W^{2nk} terms in the equations.

42

SLIDE 42

Suma inițială se separă în două sume, prima corespunzătoare eșantioanelor de ordin par, iar a doua celor de ordin impar.

Se face înmulțirea la exponent, în termenul celei de a doua sume, iar ceea ce nu depinde de n se scoate în fața sumei.

Se observă că: $W^{2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}2nk} = e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = (W_{N/2})^{nk} = W_{N/2}^{nk}$.

Fără dificultate remarcăm faptul că prima sumă, notată cu X'_k , respectiv cea de a doua, notată cu X''_k , nu sunt altcineva decât DFT-urile de dimensiune $N/2$, pentru cele $N/2$ eșantioane pare, respectiv pentru cele $N/2$ eșantioane impare.

Să ținem cont că X''_k se înmulțește cu W^k .

Putem afirma acum că am divizat problema inițială în două subprobleme!

Divide et impera pentru DFT – Analiză DIT 3/8

În concluzie, putem calcula DFT, adică X , astfel:

- Se scriu cele două DFT-uri, pe care le denumim X' și X''
- Se înmulțește a doua cu W^k , pentru fiecare $k = 0, 1, \dots, (N-1)$
- Se adună rezultatele obținute

43

SLIDE 43

Să concluzionăm... Operațiile pe care le facem sunt cele descrise în slide.

Divide et impera pentru DFT – Analiză DIT 4/8

Se consideră acum, separat, prima și respectiv a doua jumătate a ieșirilor:

Prima jumătate a ieșirilor:

$$X[k] = X'_k + W^k X''_k, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1$$

A doua jumătate a ieșirilor:

$k \rightarrow k + N/2$, cu $k = 0, 1, \dots, (N/2 - 1)$

$$\begin{aligned} X[k + N/2] &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_{N/2}^{n(k+N/2)} + W^{k+N/2} \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_{N/2}^{n(k+N/2)} \\ &= \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n] W_{N/2}^{nk} - W^k \sum_{n=0}^{N/2-1} x[2n+1] W_{N/2}^{nk} \\ &= X'_k - W^k X''_k, \quad k = 0, 1, \dots, \frac{N}{2} - 1 \end{aligned}$$

$$W_{N/2}^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi N}{N/2}} = e^{-j2\pi} = \cos(-2\pi) + j\sin(-2\pi) = 1$$

$$W_{N/2}^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi N}{N/2}} = e^{-j2\pi} = \cos(-2\pi) + j\sin(-2\pi) = 1$$

44

SLIDE 44

Prima jumătate a ieșirilor corespunde eșantioanelor: $0, 1, \dots, (N/2-1)$.

$$X[k] = X'_k + W^k X''_k$$

Pentru cea de a doua jumătate trebuie să facem schimbarea de indice $k \rightarrow k + N/2$, unde k ia exact aceleași valori $k = 0, 1, \dots, (N/2-1)$, dar termenii vor fi, deci, cei care corespund eșantioanelor: $N/2, N/2+1, N/2+2, \dots, (N-1)$.

Am marcat prin chenar înlocuirile de variabilă.

După ce se fac înmulțirile la exponenți, ținem cont că:

$$W_{N/2}^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi N}{N/2}} = e^{-j2\pi} = \cos(-2\pi) + j\sin(-2\pi) = 1$$

$$W_{N/2}^{N/2} = e^{-j\frac{2\pi N}{N/2}} = e^{-j2\pi} = \cos(-2\pi) + j\sin(-2\pi) = 1$$

Se ajunge imediat la rezultatul de pe a doua linie. Sumele care apar sunt chiar X'_k și X''_k , adică DFT-urile utilizate și mai înainte. Obținem imediat:

$$X[k + N/2] = X'_k - W^k X''_k$$

Să rezumăm rezultatele obținute.

Divide et impera pentru DFT – Analiză DIT 5/8

Punem acum în cuvinte rezultatele obținute. Pentru a calcula $X[k]$ și $X[k + N/2]$:

- Împărțim intrările în două categorii: prima este a intrărilor pare, iar a doua este a intrărilor impare
- Calculăm cele două DFT-uri corespunzătoare, de dimensiuni $N/2$
- Se înmulțesc ieșirile corespunzătoare celui de al doilea DFT cu W^k , efectuându-se $N/2$ înmulțiri
- Se combină ieșirile făcând suma, respectiv diferența, funcție de ieșirea considerată

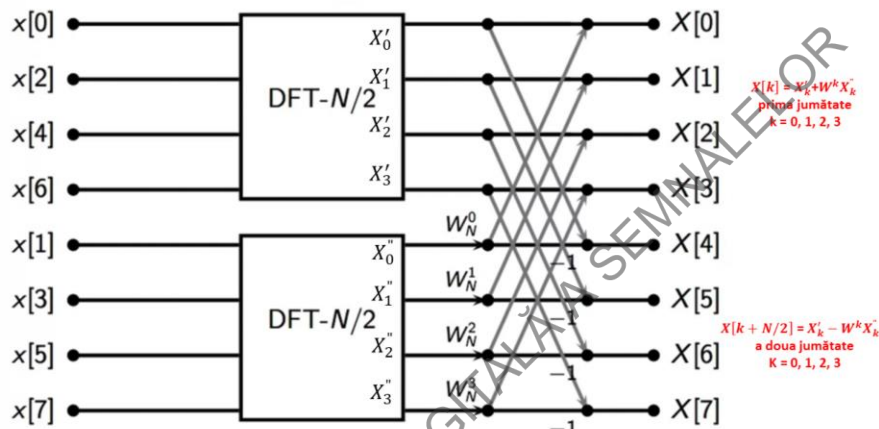
45

SLIDE 45

Se fac operațiile descrise în slide.

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

Divide et impera pentru DFT – Analiză DIT 6/8



46

SLIDE 46

Am figurat diagrama pentru cazul $N=8$.

Pentru a fi mai ușor de urmărit corectitudinea obținerii ieșirilor am notat inclusiv ieșirile intermediare, corespunzătoare fiecărui $DFT-N/2$.

Să ne reamintim formulele de calcul pentru ieșiri:

$$X[k] = X'_k + W^k X''_k \text{ - ieșirile din prima jumătate}$$

$$X[k + N/2] = X'_k - W^k X''_k \text{ - ieșirile din a doua jumătate,}$$

în ambele cazuri avându-l pe $k = 0, 1, 2, \dots, N/2-1$

Pentru a înțelege cum funcționează lucrurile, luăm spre exemplu ieșirile $X[2]$ și $X[5]$.

Ele trebuie să fie egale cu:

$$X[2] = X'_2 + W^2 X''_2$$

Cum $N = 8$, vom avea:

$$X[5] = X[1 + 8/2] = X'_1 - W^1 X''_1$$

Formulele se verifică cu ușurință ca fiind corecte pe diagramă.

Divide et impera pentru DFT – Analiză DIT 7/8

Așadar, care este acum complexitatea problemei?

- Se divide DFT în două părți de dimensiune $N/2$: complexitate 0
- Se calculează cele două DFT-uri, complexitatea fiecăruia fiind $(N/2)^2$. Totalul este, așadar, $N^2/2$.
- Se cumulează rezultatele, iar pentru asta sunt necesare $N/2$ înmulțiri cu W^k .
- Totalul este acum: $N^2/2 + N/2$, care este mai mic decât N^2 , pentru valorile lui N mai mari sau egale cu 4.
- Complexitatea problemei inițiale s-a redus aproape la jumătate.

47

SLIDE 47

Încercăm să estimăm cât de mult am redus complexitatea problemei.

Divide et impera pentru DFT – Analiză DIT 8/8

Ce se întâmplă dacă repetăm procedura în mai mulți pași?

- Repetăm procedura până ajungem la DFT-2, caz în care operațiile sunt banale (sumă și diferență)
- Sunt necesari $(\log_2 N - 1)$ pași
- Fiecare pas presupune o cumulare a rezultatelor, care se face prin $N/2$ înmulțiri și N adunări
- Totalul este: $N/2 (\log_2 N - 1)$ înmulțiri și $N \log_2 N$ adunări.

Un DFT de dimensiune N necesită un număr de operații de ordinul $N \log_2 N$.

48

SLIDE 48

De ce este acesta un rezultat important?

Pentru că, în esență, procesarea semnalului presupune utilizarea de algoritmi rapizi.

Descoperirea transformării Fourier rapide, a acestor algoritmi dezvoltați de Cooley și Tukey în 1965, a creat o explozie de interes pentru procesarea semnalului digital. Asta pentru că, dintr-o dată, calculele care păreau foarte grele înainte, au devenit abordabile, chiar și cu computerele mai modeste, din acele vremuri.

Nașterea procesării digitale a semnalelor este strâns legată de descoperirea algoritmului transformării Fourier rapide FFT.

Vizualizarea factorizării matricii DFT în cazul N = 4

- Se separă eșantioanele pare de cele impare
- Se calculează două DFT-uri de dimensiune 2, obținând ieșirile $X' [k]$ și $X'' [k]$
- Se calculează suma și diferența dintre $X' [k]$ și $W^k X'' [k]$

Toate acestea presupun 8 adunări și nicio înmulțire.

$$W_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -j \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

49

SLIDE 49

Transpunerea algoritmului FFT în limbaj matriceal se face prin factorizarea matricii inițiale DFT, după cum vom vedea în cele ce urmează.

Prima matrice din dreapta este responsabilă de separarea eșantioanelor pare de cele impare. Primele două linii pentru cele pare ($x[0]$ și $x[2]$), următoarele două pentru cele impare ($x[1]$ și $x[3]$).

Cea de a doua matrice, pornind din dreapta, corespunde calculului DFT-urilor de dimensiune 2. Se și identifică în conținutul său două matrici W_2 .

A treia matrice, pornind din dreapta, asigură atât înmulțirile cu rădăcinile unității, cât și calculul de sumă și diferență dintre termenii evidențiați în slide.

Totalul operațiilor: 8 adunări, nicio înmulțire.

Vizualizarea factorizării matricii DFT în cazul N=8, 1/8

Matricea este prea complicată pentru un singur slide!

$$\mathbf{W}_8 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & \dots & W^7 \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \dots & W^{14} \\ 1 & W^7 & W^{14} & W^{21} & \dots & W^{49} \end{bmatrix} = \dots$$

50

SLIDE 50

Vom parcurge rapid modul în care se factorizează această matrice, explicațiile fiind date pe fiecare slide în cele ce urmează.

Vizualizarea factorizării matricii DFT în cazul N=8, 2/8

PASUL 1: separarea eșantioanelor pare de cele impare, prin matricea de *decimare* de ordin 8.
Acest pas nu necesită efectuarea de operații aritmetice.

$$D_8 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

51

SLIDE 51

Primele patru linii corespund eșantioanelor pare ($x[0]$, $x[2]$, $x[4]$ și $x[6]$), iar următoarele patru celor impare ($x[1]$, $x[3]$, $x[5]$ și $x[7]$).

Fiecare linie va selecta eșantionul de care este responsabilă.

Vizualizarea factorizării matricii DFT în cazul N=8, 3/8

PASUL 2: Calculul a două DFT de dimensiune $N/2 = 4$, corespunzător eşantioanelor de ordin par, respectiv celor de ordin impar. Fiecare submatrice coincide cu W_4 , iar matricea este tip bloc-diagonală, unde O_4 este matricea nulă de ordin 4, ce conţine numai zerouri. Calculul celor două DFT – 4 necesită un total de 16 adunări.

$$\begin{bmatrix} W_4 & O_4 \\ O_4 & W_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & j & -1 & -j \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -j & -1 & j \\ & & & 1 & 1 & 1 & 1 \\ & & & 1 & j & -1 & -j \\ & & & 1 & -1 & 1 & -1 \\ & & & 1 & -j & -1 & j \end{bmatrix}$$

52

SLIDE 52

Cea de-a doua matrice corespunde calculului DFT-urilor de dimensiune 4. Se şi identifică în conţinutul său două matrici W_4 , prima responsabilă de eşantioanele de ordin par, iar cea de a doua de eşantioanele de ordin impar.

Vizualizarea factorizării matricii DFT în cazul N=8, 4/8

PASUL 3: Înmulțirea ieșirilor celui de al doilea DFT – 4 cu W^k . Matricea este de tip bloc-diagonală, unde I_4 este matricea unitate de ordin 4. Se vor efectua numai 2 înmulțiri ($W^2 = -j$ nu necesită operații).

$$\begin{bmatrix} I_4 & 0_4 \\ 0_4 & \Lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 & & & & & & \\ & & 1 & & & & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & 1 & & & \\ & & & & & W & & \\ & & & & & & W^2 & \\ & & & & & & & W^3 \end{bmatrix} \quad \text{unde: } \Lambda_4 = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & W & & \\ & & W^2 & \\ & & & W^3 \end{bmatrix}$$

53

SLIDE 53

Această matrice este responsabilă de înmulțirea ieșirilor celui de al doilea DFT-4 cu W^k .

Vizualizarea factorizării matricii DFT în cazul N=8, 5/8

PASUL 4: Recombinarea finală a ieșirilor $X[k]$ și $X[k + N/2]$ obținându-se suma și diferența, prin utilizarea matricii S_8 . Acest pas necesită un număr de 8 adunări.

$$S_8 = \begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

54

SLIDE 54

Cea de-a patra, și ultima matrice, este responsabilă de efectuarea sumei și diferenței dintre termenii X'_k și $W^k X''_k$. Primele patru linii corespund sumelor, iar următoarele patru corespund diferențelor ce trebuie realizate.

Vizualizarea factorizării matricii DFT în cazul N=8, 6/8

În total, se efectuează produsul a 4 matrici pătratice de ordin 8, fiind necesare 24 de adunări și 2 înmulțiri.

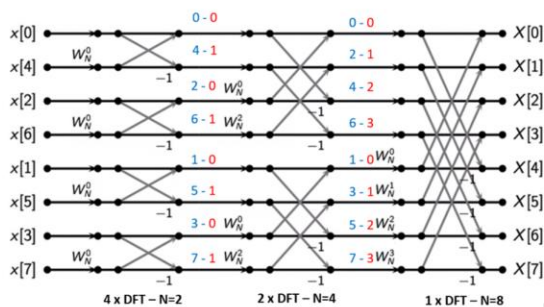
$$W_8 = \begin{bmatrix} I_4 & I_4 \\ I_4 & -I_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_4 & 0_4 \\ 0_4 & \Lambda_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} W_4 & 0_4 \\ 0_4 & W_4 \end{bmatrix} \cdot D_8$$

55

SLIDE 55

Matricea DFT-8 se scrie ca produs al celor 4 matrici evidențiate anterior.

Diagrama fluture DFT în cazul N=8, 7/8



Aceasta este transpunerea algoritmului FFT într-o *diagramă-fluture*.

Pentru ca ieșirile să fie în ordinea $X[0], X[1], \dots, X[7]$ este necesar ca „intrările” de aici, pentru DFT- $N=8$, să fie în ordinea 0, 2, 4, 6 – cele pare, și apoi 1, 3, 5, 7 – cele impare. Pentru cele două DFT – $N=4$, care urmează, și care sunt independente unul de altul, ieșirile acestora se redenumesc, pentru fiecare, în 0, 1, 2, 3, pentru a vedea cine au fost de fapt noile intrări pare, respectiv impare.

Noile intrări ale primului DFT – $N=4$, vor fi deci: 0, de la 0, și 4, de la 2, ca intrări pare, respectiv 2, de la 1, și 6, de la 3, ca intrări impare.

Noile intrări ale celui de al doilea DFT – $N=4$, vor fi deci: 1, de la 0, și 5, de la 2, ca intrări pare, respectiv 3, de la 1, și 7, de la 3, ca intrări impare.

Ajunșând acum la cele patru DFT – $N=2$, ordinea intrărilor nu mai trebuie schimbată, succesiunea par-impair fiind una firească.

56

SLIDE 56

Toate explicațiile sunt date pe slide.

SLIDE 56

Aceasta este transpunerea algoritmului FFT într-o *diagramă-fluture*.

Pentru ca ieșirile să fie în ordinea $X[0], X[1], \dots, X[7]$ este necesar ca „intrările” de aici, pentru DFT- $N=8$, să fie în ordinea 0, 2, 4, 6 – cele pare, și apoi 1, 3, 5, 7 – cele impare. Pentru cele două DFT – $N=4$, care urmează, și care sunt independente unul de altul, ieșirile acestora se redenumesc, pentru fiecare, în 0, 1, 2, 3, pentru a vedea cine au fost de fapt noile intrări pare, respectiv impare.

Noile intrări ale primului DFT – $N=4$, vor fi deci: 0, de la 0, și 4, de la 2, ca intrări pare, respectiv 2, de la 1, și 6, de la 3, ca intrări impare.

Noile intrări ale celui de al doilea DFT – $N=4$, vor fi deci: 1, de la 0, și 5, de la 2, ca intrări pare, respectiv 3, de la 1, și 7, de la 3, ca intrări impare.

Ajunșând acum la cele patru DFT – $N=2$, ordinea intrărilor nu mai trebuie schimbată, succesiunea par-impair fiind una firească.

Concluzii: DFT în cazul $N=8$, 8/8

- Algoritmul Cooley-Tukey, prezentat anterior, este cel mai popular algoritm de calcul a DFT, utilizat pentru N de forma 2^K
- Există o serie de algoritmi FFT utilizabili pentru cazurile în care N nu este de această formă
- Nu este necesar, în aceste condiții, să completăm cu zerouri un vector pentru a se ajunge la o putere a lui 2
- Utilizarea algoritmilor de calcul rapid aduce beneficii importante în ceea ce privește numărul total de operații ce trebuie efectuate și implicit conduce la reducerea timpilor de calcul

57

SLIDE 57

Să analizăm cele obținute până acum...

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNELOR