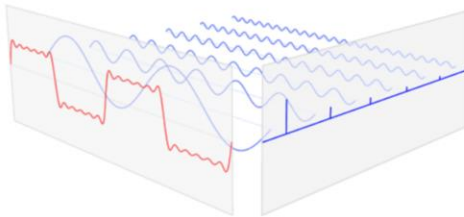


CURSUL 6

- DFT - TRANSFORMATA FOURIER PENTRU SEMNALE DISCRETE DE LUNGIME FINITĂ (TFD).
 - BAZA FOURIER PENTRU $\mathbb{C}^N$. SCRIEREA CU SEMNALE ȘI VECTORI A BAZE.
 - DEFINIȚIE DFT. FORMA MATRICEALĂ. FORMA EXPLICITĂ.
 - ANALIZĂ.
 - EXEMPLE DE CALCUL DFT.
- REPREZENTARE ÎN DOMENIUL FRECVENȚĂ ȘI INTERPRETARE.
 - DISTRIBUIREA ENERGIEI ÎN SPECTRU.
 - SINTEZĂ.
 - EXEMPLE.



1

SLIDE 1

În cursul precedent am evidențiat *baza Fourier* și ne-am propus să o utilizăm pentru semnalele discrete de lungime finită, asociate cu elementele lui $\mathbb{C}^N$.

Gândiți-vă la $\mathbb{C}^N$ așa cum a fost el definit ca spațiu vectorial.

Notății pentru elementele bazei Fourier a lui $\mathbb{C}^N$

- Notăția sub formă de *semnal*:

$$w_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad \text{unde } n, k = 0, 1, \dots, N-1$$

- Notăția sub formă de *vector*:

$$\{w^{(k)}\}_{k=0,1,\dots,N-1} = \{w_0^{(k)}, w_1^{(k)}, \dots, w_{N-1}^{(k)}\}$$

$$\text{unde } w_n^{(k)} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn} \text{ și } n = 0, 1, \dots, N-1$$

2

SLIDE 2

Am „descoperit” în baza Fourier N *semnale* diferite, fiecare dintre ele de lungime N . Reamintesc faptul că indicele k este cel care stabilește numărul de ordine al fiecărui semnal $w_k[n]$ din bază și ia valori între 0 și $(N-1)$. Fiecare semnal din bază, însă, are la rândul său N elemente (eșantioane). Prin n am indicat numărul de ordine al elementului (eșantionului) în cadrul semnalului, care și el ia valori tot între 0 și $(N-1)$.

Reținem, deci, că k este indicele semnalului în bază, iar n este indicele elementului (eșantionului) în fiecare semnal.

Fiecare element se calculează cu ajutorul formulei:

$$w_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Ce înseamnă asta?

Avem o exponențială complexă $e^{j\omega_k n}$, de frecvență:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$$

Am demonstrat că mulțimea astfel definită conține N *semnale ortogonale* în $\mathbb{C}^N$.

Am arătat că putem exprima, însă, cele N elemente ale bazei Fourier folosind și notația cu *vectori*, exact ca în figură. Superscriptul k din paranteze ne va furniza numărul de ordine al vectorului în bază, iar n pe cel al elementului component în cadrul vectorului.

Pentru a înțelege și mai bine notațiile introduse subliniez că diferența este numai de notații. Nu există nicio diferență între valorile elementelor din notația ca *semnal* sau cea ca *vector*:

$$w^{(k)} = w_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} w_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

SĂ NE REAMINTIM CE CONȚINE BAZA FOURIER:

- $\{w_0[n], w_1[n], \dots, w_{N-1}[n]\}$ - N semnale, de lungime N fiecare

$$\cdot \left\{ \begin{bmatrix} w_0[0] \\ w_0[1] \\ \vdots \\ w_0[N-1] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1[0] \\ w_1[1] \\ \vdots \\ w_1[N-1] \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} w_{N-1}[0] \\ w_{N-1}[1] \\ \vdots \\ w_{N-1}[N-1] \end{bmatrix} \right\} - \text{desfășurat}$$

- $\{w_n^{(0)}, w_n^{(1)}, \dots, w_n^{(N-1)}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{w^{(0)}, w^{(1)}, \dots, w^{(N-1)}\}$ - N vectori, cu N componente fiecare

$$\overbrace{w^{(k)}}^{\text{notatie vector}} = w_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \overbrace{w_k[n]}^{\text{notatie semnal}} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

3

SLIDE 3

Pentru o mai bună înțelegere, priviți la paralela făcută pe slide pentru cele două notații. De asemenea, haideți să ne reamintim cum arată în realitate vectorii, adică elementele bazei Fourier în cazul analizat de noi, al lui $\mathbb{C}^{64}$ (se reiau, din cursul anterior, slide-urile cu $w^{(k)}$, cu $k = 0, \dots, 63$).

Ce avem

- N vectori ortogonali, ce constituie o bază pentru spațiul vectorial $\mathbb{C}^N$.
- Vectorii bazei nu sunt, însă, ortonormali. Factorul de normalizare a bazei este $1/\sqrt{N}$.

4

SLIDE 4

Am arătat că cele N componente (semnale/vectori) sunt ortogonale, dar nu ne este asigurată ortonormalitatea. Prin urmare, va trebui să normalizăm produsele scalare în mod explicit, folosind factorul de normalizare evidențiat.

Să nu uităm niciun moment că suntem în $\mathbb{C}^N$.

Transformarea Fourier Discretă (Discrete Fourier Transform - DFT) aplicată semnalelor în timp discret de lungime finită

$X_k = \langle w^{(k)}, x \rangle$ - **analiză**: din domeniul timp $\rightarrow$ în domeniul frecvență

$x = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k w^{(k)}$ - **sinteză**: din domeniul frecvență $\rightarrow$ în domeniul timp

5

SLIDE 5

Fiind dat un element arbitrar al lui $\mathbb{C}^N$, să-l numim x , dorim să exprimăm acest vector în noua bază Fourier.

Știm că formula de analiză a lui x ne va furniza N noi coeficienți pentru vectorul x scris în raport cu noua bază.

Fiecare dintre acești coeficienți, pe care îi vom nota cu X_k , va fi dat de produsul scalar al lui x cu vectorul corespunzător $w^{(k)}$, al noii baze.

Dacă vrem să revenim la reprezentarea originală a lui x , trebuie, pur și simplu, să însumăm o versiune scalată a tuturor elementelor din bază, unde factorul de scalare nu este altcineva decât coeficientul X_k , găsit în formula de analiză.

Vă rog să rețineți că deoarece baza nu este ortonormală, va trebui să normalizăm undeva... Alegem să normalizăm chiar în formula de sinteză, prin împărțirea sumei cu N .

Aceasta este transformata Fourier discretă DFT!

DFT sub forma matriceală

Dacă notăm $W_N \stackrel{\text{def}}{=} W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ (folosim W când N se subînțelege din context), atunci matricea schimbării bazei este $\mathbf{W}$, adică matricea cu elementele $W_N^{n \cdot k}$, dată prin:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W^1 & W^2 & W^3 & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & W^6 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & W^{3(N-1)} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{bmatrix}$$

$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}$ - formula pentru **analiză**

$\mathbf{x} = \frac{1}{N} \mathbf{W}^H \mathbf{X}$ - formula pentru **sinteză**

6

SLIDE 6

Pentru a sublinia că DFT este doar o operație de algebră liniară, putem exprima schimbarea bazei și în notație matriceală.

Deci, dacă definim $W_N \stackrel{\text{def}}{=} W = e^{-j\frac{2\pi}{N}}$ (cu notația W folosită numai atunci când N este evident din context), putem scrie această matrice $\mathbf{W}$, care conține elementele (aflate la intersecția liniei p cu coloana q , notate $W_{p,q}$):

$$W_{p,q} = W_N^{p \cdot q} = e^{-j\frac{2\pi}{N} \cdot p \cdot q}, \text{ cu: } p, q = 0, 1, \dots, (N-1)$$

Cu această notație *formula de analiză* devine:

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}\mathbf{x}.$$

Deci matricea (vectorul) coeficienților Fourier se obține prin produsul matricei definite de noi, $\mathbf{W}$, cu matricea (vectorul) original $\mathbf{x}$.

Invers, *formula de sinteză* ne va permite să recuperăm vectorul original, exprimat prin matricea $\mathbf{x}$, efectuând produsul dintre hermitianul lui $\mathbf{W}$, respectiv matricea notată cu $\mathbf{W}^H$, cu vectorul coeficienților Fourier, exprimat prin matricea $\mathbf{X}$, totul înmulțindu-se cu raportul de normalizare $1/N$.

Reamintesc faptul că hermitianul $\mathbf{W}^H$ se obține prin conjugarea tuturor elementelor lui $\mathbf{W}$, după care se face transpunerea matricii obținute.

DFT în forma explicită

Formula pentru ANALIZĂ

N puncte $x[n]$ din domeniul timp $\rightarrow N$ puncte $X[k]$ în domeniul frecvență

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

Formula pentru SINTEZĂ

N puncte $X[k]$ din domeniul frecvență $\rightarrow N$ puncte $x[n]$ în domeniul timp

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] e^{j\frac{2\pi}{N}nk}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

7

SLIDE 7

Un al treilea mod de a privi transformarea Fourier discretă DFT este prin luarea în considerare, în mod explicit, a operațiilor și semnalelor implicate în transformare. Ceea ce realizăm, de fapt, este produsul scalar într-un mod explicit. Această abordare este deosebit de utilă dacă dorim să evidențiem natura algoritmică a transformării.

Observăm că în cazul analizei semnalului trecem de la N puncte $x[n]$ din domeniul timp la N puncte $X[k]$ din domeniul frecvență. Ne referim la coeficienții $X[k]$ ca la spectrul semnalului.

Formula de sinteză este duala celei de analiză, cu singura diferență că aici trebuie să ne amintim să punem în față coeficientul de normalizare. Și astfel, în cazul sintezei semnalului, facem cale înapoi și trecem de la N puncte $X[k]$ din domeniul frecvență la N puncte $x[n]$ în domeniul timp.

Sigur acesta este momentul potrivit pentru a vă reaminti că, deși folosim cuvântul „timp”, suntem în lumea timpului discret, iar aici timpul este o mărime adimensională. Deci nu ne gândim la timp în sensul exprimării sale în secunde sau în oricare altă unitate fizică de măsură, ci doar la un indice n care se mișcă în mulțimea numerelor întregi.

Liniaritatea DFT

$$\text{DFT} \{ \alpha x[n] + \beta y[n] \} = \alpha \text{DFT} \{ x[n] \} + \beta \text{DFT} \{ y[n] \}$$

8

SLIDE 8

Vom continua cu câteva exemple de calcul a transformatei Fourier discrete DFT.

Înainte de toate, evidențiem o proprietate pe care o vom folosi în cele ce urmează și care este imediată chiar din definiția produsului scalar. Ne referim la faptul că transformata Fourier discretă DFT este un operator liniar.

Dacă aveți transformata DFT a sumei a doi vectori, aceasta va fi egală cu suma DFT-urilor vectorilor.

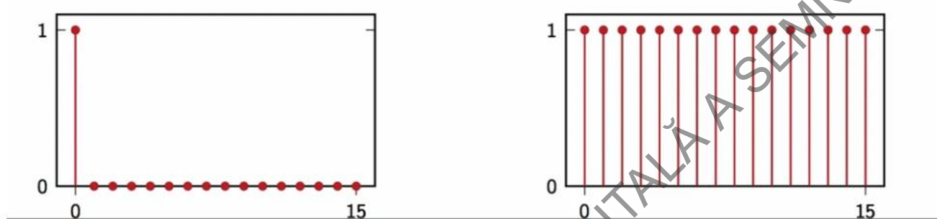
Același lucru este valabil și pentru înmulțirea cu scalari.

Relația din slide reunește aceste două proprietăți.

DFT pentru

$$x[n] = \delta[n], \quad x[n] \in \mathbb{C}^N$$

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n] e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ = 1$$



SLIDE 9

Primul exemplu este DFT pentru *semnalul delta în timp discret*: $\delta[n]$.

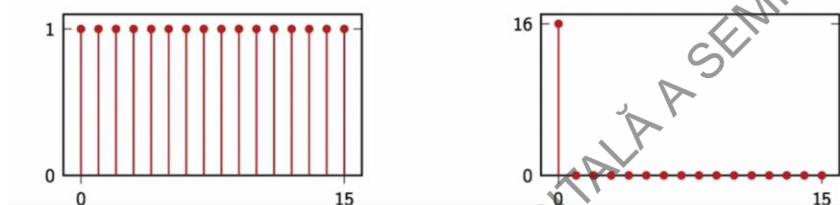
Să ne amintim cum arată reprezentarea acestui semnal în domeniul timp. El este 1 în 0 și 0 în rest, pe toată lungimea finită a semnalului.

Acum, dacă folosim formula de definiție a transformatei DFT, vom vedea că semnalul $\delta[n]$ va „izola” doar prima componentă, restul fiind nule. Deci rezultatul va fi 1 pentru toate valorile indicelui k , iar transformata Fourier a semnalului delta în timp discret este constanta 1.

Cu alte cuvinte, $\delta[n]$, reprezentat în domeniul frecvență, conține toate frecvențele din gama posibilă de frecvențe.

DFT pentru $x[n] = 1, \quad x[n] \in \mathbb{C}^N$

$$\begin{aligned} X[k] &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= N\delta[k] \end{aligned}$$



10

SLIDE 10

Exemplul dual este DFT pentru *semnalul unitate în timp discret*: $u[n]$.

Cum aveți valoarea 1 pentru toate valorile indicelui de timp n , dacă efectuați produsul scalar veți vedea că transformarea Fourier corespunde unui semnal delta. Acest lucru este destul de intuitiv pentru că nu este nimic altceva decât formula de ortogonalitate pe care am demonstrat-o anterior. Deci rezultatul obținut va fi egal cu N în 0 și, în rest, 0 peste tot.

DFT pentru $x[n] = 3 \cos(2\pi/16 n)$, $x[n] \in \mathbb{C}^{64}$

$$\begin{aligned}
 x[n] &= 3 \cos\left(\frac{2\pi}{16} n\right) \\
 &= 3 \cos\left(\frac{2\pi}{64} 4n\right) \\
 &= \frac{3}{2} \left[e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{-j\frac{2\pi}{64} 4n} \right] \\
 &= \frac{3}{2} \left[e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{j\frac{2\pi}{64} 60n} \right] \\
 &= \frac{3}{2} (w_4[n] + w_{60}[n])
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \langle w_k[n], x[n] \rangle \\
 &= \langle w_k[n], \frac{3}{2} (w_4[n] + w_{60}[n]) \rangle \\
 &= \frac{3}{2} \langle w_k[n], w_4[n] \rangle + \frac{3}{2} \langle w_k[n], w_{60}[n] \rangle \\
 &= \begin{cases} 96 & \text{pt } k = 4, 60 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}
 \end{aligned}$$

11

SLIDE 11

Să încercăm acum să calculăm DFT în cazul unei funcții sinusoidale:

$$x[n] = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{16} n\right).$$

Suntem în $\mathbb{C}^{64}$, deci dimensiunea spațiului vectorial este $N=64$. Frecvența fundamentală a transformării Fourier va fi $\frac{2\pi}{64}$, iar frecvențele din baza Fourier vor fi multipli ai acesteia:

$$\omega_k = \frac{2\pi}{64} k.$$

Având în vedere acest lucru, vom începe prin a exprima frecvența sinusoidale date ca multiplu al frecvenței fundamentale a acestui spațiu vectorial.

Deci argumentul cosinusului îl scriem ca: $\frac{2\pi}{16} n = \frac{2\pi}{64} 4n$.

Vom exprima acum cosinusul cu ajutorul exponențialei complexe, folosind formula lui Euler, de unde rezultă că:

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{2\pi}{64} 4n\right) = \frac{e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} + e^{-j\frac{2\pi}{64} 4n}}{2}$$

După ce efectuăm înlocuirea, ceea ce deranjează este semnul minus de la al doilea exponent. Putem scăpa simplu de el prin adăugarea convenabilă a unui multiplu întreg de 2π la acest exponent (în cazul nostru $j2\pi n$) și obținem:

$$-j\frac{2\pi}{64} 4n + j2\pi n = j\frac{2\pi}{64} 60n.$$

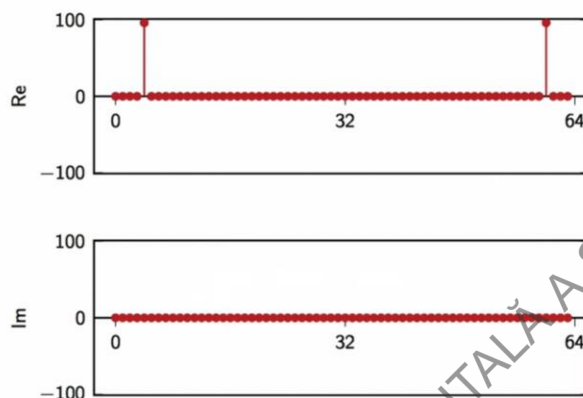
Așadar, rezultă imediat:

$$x[n] = \frac{3}{2} (w_4[n] + w_{60}[n]).$$

După parcurgerea acestor pași, calculul DFT este simplu. Putem folosi faptul că $X[k]$ se exprimă ca produsul scalar al fiecărui vector din bază $w_k[n]$ cu $x[n]$ și exploatăm proprietatea de liniaritate a DFT. Se ajunge la rezultatul din slide.

Reprezentarea

DFT pentru $x[n] = 3 \cos(2\pi/16 n)$, $x[n] \in \mathbb{C}^{64}$



12

SLIDE 12

Putem acum reprezenta graficul DFT al funcției considerate. Acesta va fi 0 peste tot în partea reală, cu excepția punctelor 4 și 60, în timp ce partea imaginară va fi 0 peste tot.

DFT pentru $x[n] = 3 \cos(2\pi/16 n + \pi/3)$, $x[n] \in \mathbb{C}^{64}$

$$\begin{aligned}
 x[n] &= 3 \cos\left(\frac{2\pi}{16} n + \frac{\pi}{3}\right) \\
 &= 3 \cos\left(\frac{2\pi}{64} 4n + \frac{\pi}{3}\right) \\
 &= \frac{3}{2} \left[e^{j\frac{2\pi}{64} 4n} e^{j\frac{\pi}{3}} + e^{-j\frac{2\pi}{64} 4n} e^{-j\frac{\pi}{3}} \right] \\
 &= \frac{3}{2} (e^{j\frac{\pi}{3}} w_4[n] + e^{-j\frac{\pi}{3}} w_{60}[n])
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X[k] &= \langle w_k[n], x[n] \rangle \\
 &= \begin{cases} 96e^{j\frac{\pi}{3}} & \text{pt } k=4 \\ 96e^{-j\frac{\pi}{3}} & \text{pt } k=60 \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}
 \end{aligned}$$

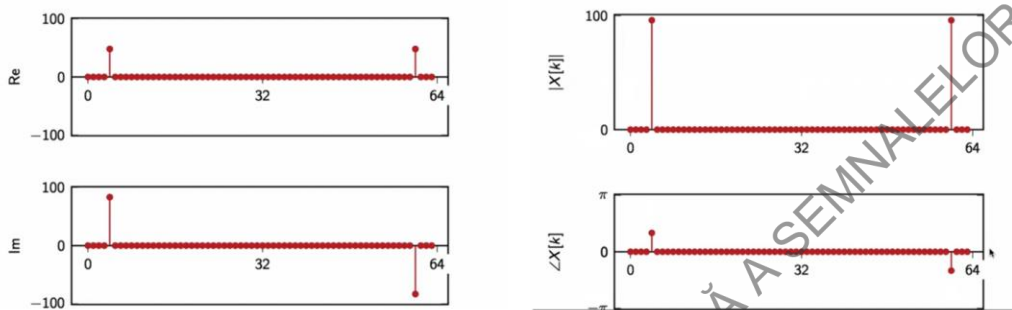
13

SLIDE 13

Să încercăm acum un alt exemplu. Luăm același cosinus ca mai înainte, dar adăugăm și o fază inițială. Artificiile de calcul pe care le folosim sunt aceleași, iar rezultatul la care se ajunge este cel dat în slide.

Reprezentarea

DFT pentru $x[n] = 3 \cos(2\pi/16 n + \pi/3)$, $x[n] \in \mathbb{C}^{64}$



14

SLIDE 14

Vom reprezenta DFT exact ca mai înainte, însă, de această dată, vom avea valori nenule atât în reprezentarea părții reale, cât și în cea a părții imaginare.

Probabil o modalitate mai clară de a reprezenta această transformată Fourier, este de a reprezenta grafic atât amplitudinea, cât și faza coeficienților Fourier.

Amplitudinea va fi egală cu 96, atât pentru $k = 4$, cât și pentru $k = 60$, iar faza va fi egală cu $\pi/3$ pentru $k = 4$, respectiv cu $-\pi/3$ pentru $k = 60$.

Acest mod de reprezentare a rezultatelor ne ajută să separăm amplitudinea sinusoidei de faza sa. Spunem că reprezentăm astfel spectrul de amplitudini și cel de faze.

DFT pentru $x[n] = 3 \cos(2\pi/10 n)$, $x[n] \in \mathbb{C}^{64}$

$$\frac{2\pi}{64} 6 < \frac{2\pi}{10} < \frac{2\pi}{64} 7$$

15

SLIDE 15

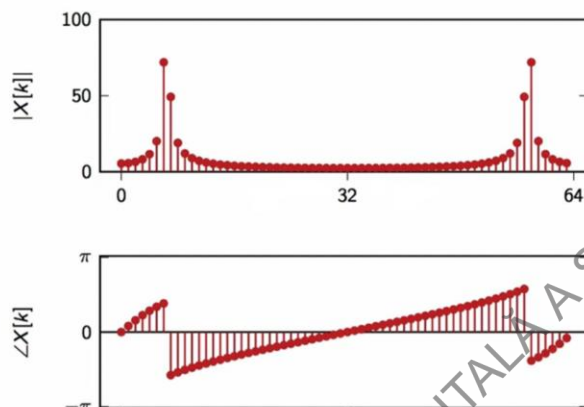
Cum vom proceda, însă, atunci când avem o sinusoidă a cărei frecvență nu mai este multiplu al frecvenței fundamentale corespunzătoare spațiului vectorial în care lucrăm?

De exemplu, să luăm $x[n] = 3 \cos\left(\frac{2\pi}{10} n\right)$ în $\mathbb{C}^{64}$. Frecvența semnalului nu este un astfel de multiplu, dar se încadrează între limitele din slide, convenabile pentru noi deoarece sunt multipli ai frecvenței fundamentale $\frac{2\pi}{64}$.

În astfel de cazuri se calculează DFT numeric, deoarece DFT este un algoritm care necesită un număr finit de operații și poate fi calculat cu precizie bună folosind, spre exemplu, MATLAB.

Reprezentarea

DFT pentru $x[n] = 3 \cos(2\pi/10 n)$, $x[n] \in \mathbb{C}^{64}$



16

SLIDE 16

Există algoritmi foarte eficienți cu ajutorul cărora se rulează DFT într-un pachet numeric și se pot reprezenta amplitudinea și faza.

Iată în figură rezultatul obținut în acest mod pentru semnalul considerat. Ceea ce se întâmplă important în aceste reprezentări este în vecinătatea momentelor 6 și 7, respectiv (63-6) și (63-7), așa cum se poate vedea, atât în cazul amplitudinii, cât și a fazei. Era de așteptat acest lucru ținând cont de aproximarea făcută anterior. Trebuie remarcată, însă, existența unor contribuții nenule pe reprezentări la toate momentele dintre 0 și 63.

Haideți să fixăm puțin noțiunile

- Ce este DFT?
- Ce înțelegem prin analiza semnalului?
- Ce înțelegem prin sinteza semnalului?
- Cum trebuie interpretați coeficienții DFT?

17

SLIDE 17

Până acum am studiat în detaliu transformata Fourier discretă (DFT), care reprezintă instrumentul de analiză Fourier pentru semnalele discrete de lungime finită.

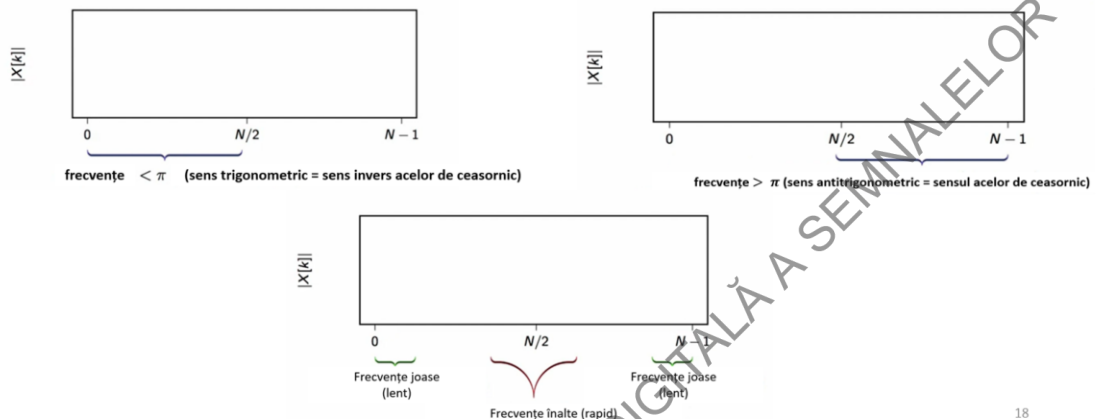
DFT nu este altceva decât o simplă schimbare de bază.

Formula de analiză (deplasarea din domeniul timp în domeniul frecvență) este dată de produsul scalar al semnalului cu fiecare dintre vectorii bazei Fourier.

Formula de sinteză (de trecere din domeniul frecvență în domeniul timp) este o combinație liniară a vectorilor din bază, scalați cu coeficienții pe care i-am găsit în formula de analiză.

În cel mai general caz, coeficienții DFT sunt numere complexe și, prin urmare, au o parte reală și una imaginară. Pentru a interpreta acești coeficienți este convenabil să le reprezentăm amplitudinea $|X[k]|$ și faza $\angle X[k]$ (între $-\pi$ și π).

Interpretarea reprezentării DFT



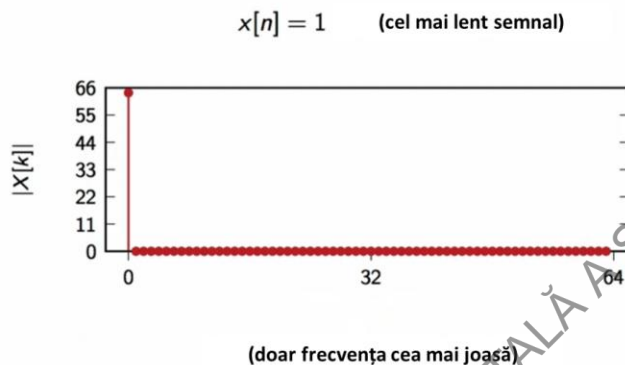
SLIDE 18

Într-o reprezentare a DFT, frecvențele cuprinse între 0 și $N/2$ corespund unor frecvențe mai mici decât π și le interpretăm ca rotații, pe cercul unitate în sens trigonometric (= sens invers acelor de ceasornic), ale punctului în planul complex.

Frecvențele cuprinse între $N/2$ și $(N-1)$ corespund unor frecvențe mai mari decât π și corespund unor rotații în sens antitrigonometric (= sensul acelor de ceasornic). Frecvențele apropiate de 0 și $(N-1)$ corespund frecvențelor joase, în sensul că indică o încetinire a rotației pe cerc, sensul acestuia putând fi trigonometric sau antitrigonometric.

Frecvențele apropiate de $N/2$ corespund frecvențelor înalte, adică celor mai rapide rotații pe cerc și pot fi fie în sens trigonometric, fie în sens antitrigonometric.

EXEMPLUL 1 de interpretare a reprezentării DFT



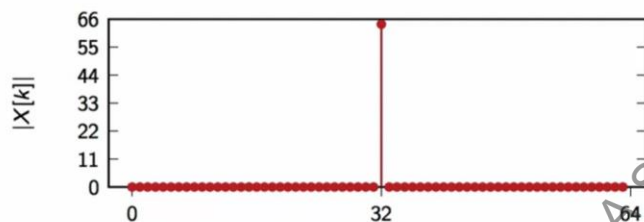
19

SLIDE 19

Deci, dacă ne întoarcem la exemplele analizate mai înainte și-l considerăm pe $x[n]=1$, observăm din analiza reprezentării DFT că acesta este *cel mai lent semnal posibil*, în sensul că el nu se schimbă niciodată, rămânând constant pe toată durata vieții sale. În mod corespunzător, transformata sa Fourier conține doar coeficientul $X[0]$ nenul, ce corespunde celei mai mici frecvențe. De fapt, aceasta nici măcar nu este o frecvență în sensul cunoscut, deoarece $k=0$ corespunde absenței mișcării.

EXEMPLUL 2 de interpretare a reprezentării DFT

$$x[n] = \cos \pi n = (-1)^n \quad (\text{cel mai rapid semnal})$$



(doar frecvența cea mai înaltă)

20

SLIDE 20

Dimpotrivă, dacă luăm $x[n] = \cos(\pi n)$, care este egal cu $(-1)^n$, acesta este *cel mai rapid semnal în timp discret*, DFT-ul său având un singur coeficient diferit de zero, însă exact în punctul corespunzător frecvenței celei mai înalte.

Cum se distribuie energia?

Teorema lui Parseval
(de conservare a energiei): $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum |\alpha_k|^2$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X[k]|^2$$

Energia semnalului pe frecvența $\omega_k = \frac{2\pi}{N} k$ este proporțională cu pătratul amplitudinii coeficientului DFT de rang k : $|X[k]|$

21

SLIDE 21

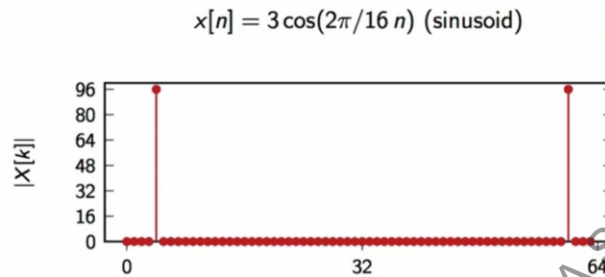
Facem acum trimitere la rezultatul cunoscut sub denumirea de *teorema lui Parseval*.

În esență, aceasta exprimă faptul că energia unui semnal nu se schimbă prin schimbarea bazei, adică energia se conservă indiferent de domeniu, ea fiind aceeași în domeniile timp și frecvență.

Acum, pătratul amplitudinii $|X[k]|$, a coeficientului DFT de rang k , ne oferă o informație importantă cu privire la cantitatea de energie asociată oscilației corespunzătoare care intră în compunerea semnalului. Prin urmare, energia semnalului pe o anumită frecvență $\omega_k = \frac{2\pi}{N} k$ este direct proporțională cu amplitudinea $|X[k]|$.

Vom detalia în cele ce urmează.

EXEMPLUL 3 de interpretare a reprezentării DFT



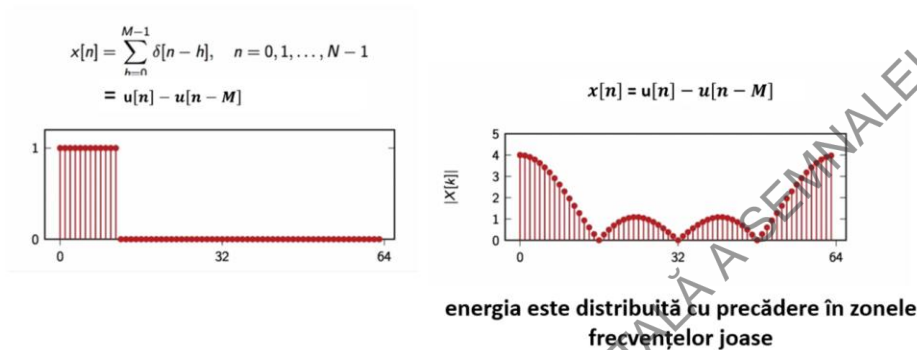
Energia semnalului este concentrată în două puncte, corespunzătoare la o aceeași frecvență (o dată în sens trigonometric și a doua oară în sens antitrigonometric)

22

SLIDE 22

Dacă ne întoarcem la unul dintre exemplele analizate anterior, respectiv această sinusoidă, având frecvența multiplu al frecvenței fundamentale a spațiului vectorial în care se lucrează, așa cum am arătat, vedem că amplitudinea este diferită de zero doar în două puncte, iar aceasta indică faptul că energia semnalului este concentrată doar pe aceste două componente și nicăieri altundeva.

EXEMPLUL 4 de interpretare a reprezentării DFT



23

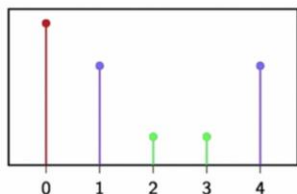
SLIDE 23

Dacă se urmează pașii de calcul a DFT pentru semnalul treaptă unitate de lungime M , în spațiul vectorial $\mathbb{C}^N$, se obține reprezentarea din figură și vedem că, deși cea mai mare parte a energiei este concentrată pe frecvențele joase, va exista energie în tot spectrul. Deci va fi nevoie de energie la toate frecvențele pentru a se crea o astfel de treaptă.

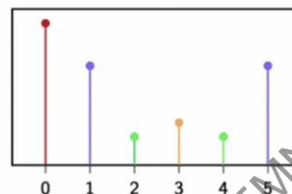
DFT pentru semnale reale

Pentru semnale reale DFT este caracterizată prin simetrie în amplitudine

$$|X[k]| = |X[N - k]|, \quad k = 1, 2, \dots, \lfloor N/2 \rfloor$$



$N = 5$. (lungime impară)



$N = 6$. (lungime pară)

24

SLIDE 24

În sfârșit, haideți să încercăm să formalizăm ceva ce probabil ați observat deja.

Mă refer la faptul că reprezentarea DFT în amplitudine, pentru semnalele reale, este una simetrică. Când folosim cuvântul simetrie punem și ghilimelele de rigoare, pentru că la semnale în timp discret de lungime finită, simetria depinde de paritatea lui N , a lungimii semnalului. Pentru semnale de lungime impară vom avea o situație, iar pentru semnale de lungime pară vom avea o altă situație.

În general, ceea ce observăm este că amplitudinea coeficientului DFT de rang k este egală cu amplitudinea coeficientului calculat în $(N-k)$, iar acest lucru este valabil pentru un k care merge de la 1 până la parte întreagă din $N/2$, notată cu $\lfloor N/2 \rfloor$.

Cazul lui N -impar

Deci, în cazul semnalului de lungime impară, lucrurile se petrec astfel:

Coeficientul din 0 este liber.

Coeficientul din 1 va avea amplitudinea egală cu cea corespunzătoare coeficientului din $(N-1)$. Cum reprezentările sunt făcute pentru cazul particular $N = 5$, vom avea aceeași amplitudine pentru coeficientul din 1 și cel din $(5-1)=4$, respectiv pentru coeficientul din 2 și cel din $(5-2)=3$.

Cazul lui N -par

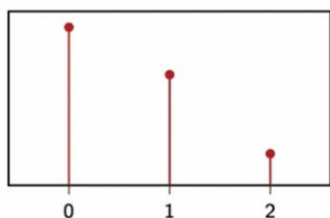
Acum, dacă luăm un semnal de lungime pară, să spunem $N=6$, coeficientul din 0 va fi liber.

Vom avea aceeași amplitudine pentru coeficientul din 1 și cel din 5, respectiv pentru coeficientul din 2 și cel din 4. Coeficientul din 3 va fi liber.

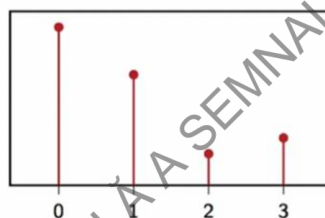
De câte puncte din cele N este nevoie pentru reprezentarea DFT în cazul unui semnal real?

CONSECINȚA SIMETRIEI:

În cazul semnalelor reale reprezentarea amplitudinii necesită numai $\lfloor N/2 \rfloor + 1$ puncte



$N = 5$, (lungime impară)



$N = 6$, (lungime pară)

25

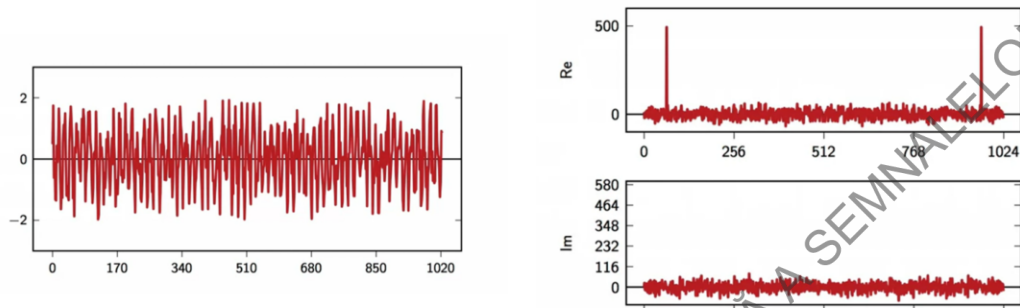
SLIDE 25

Concluzionăm că pentru un semnal real amplitudinea coeficienților DFT este complet specificată de $\lfloor N/2 \rfloor + 1$ coeficienți.

Dacă $N=5$, avem nevoie doar de trei coeficienți, iar pentru $N=6$, avem nevoie doar de patru coeficienți.

Motivul pentru care se întâmplă acest lucru este că atunci când luăm DFT pentru un semnal real, deși ajungem la coeficienți complexi, aceștia vor fi complex conjugați și, deci, de același modul (adică aceeași amplitudine).

Analiza semnalului misterios



26

SLIDE 26

Vă amintiți cu siguranță că la startul capitolului privind analiza Fourier am pornit de la un semnal „misterios”. V-am arătat atunci că prin schimbarea bazei în care este reprezentat semnalul, trecând la baza Fourier, dintr-o dată am putut vedea o altă reprezentare care părea să ne ofere mult mai multe informații cu privire la semnal. Acum ne putem întoarce la acel exemplu și putem să-l analizăm aplicând ceea ce știm despre DFT.

Luând transformata DFT a semnalului și reprezentând părțile sale reală și imaginară, observăm perechea de vârfuri care apar în poziții simetrice în spectru. Știm deja că acest lucru indică prezența unei componente sinusoidale puternice și, mai important, e o componentă sinusoidală care are frecvența un multiplu al frecvenței de bază din spațiul vectorial în care „trăiește” semnalul.

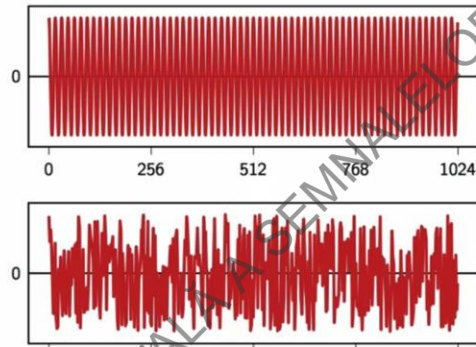
Dacă privim în detaliu la ce se întâmplă în spectru, vedem că vârfurile sunt pentru $k = 64$ și pentru $k = 960 = 1024 - 64$. De asemenea, vedem că vârfurile apar doar în partea reală a spectrului și ne amintim că acest lucru se întâmplă numai atunci când avem de-a face cu un cosinus.

Concluziile analizei

$$x[n] = \cos(\omega n + \phi) + \eta[n]$$

cu

$$\begin{aligned}\phi &= 0 \\ \omega &= \frac{2\pi}{1024} 64\end{aligned}$$



27

SLIDE 27

Deci, dintr-o simplă inspecție vizuală, știm la ce să ne așteptăm cu privire la semnal: va exista o componentă în cosinus, la care va trebui să-i determinăm frecvența și faza inițială, și va mai exista și o altă componentă pe care o presupunem a fi una de zgomot, în sensul în care ea nu prezintă nicio structură identificabilă.

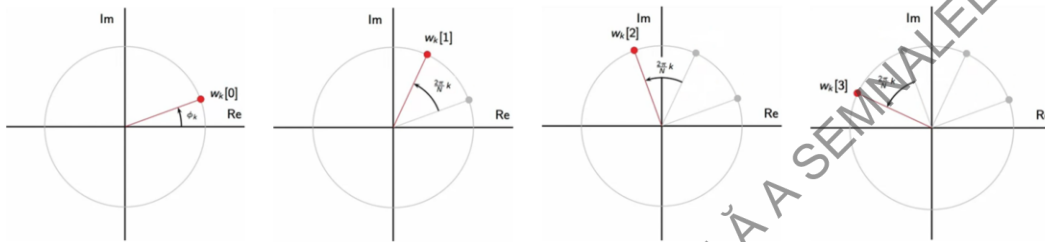
Deoarece în reprezentarea părții imaginare a DFT nu se distinge vreun vârf anume, putem presupune că faza cosinusului este 0.

În ceea ce privește frecvența, știm că vârful apare la $k=64$ și, cum suntem într-un spațiu cu 1024 de puncte, frecvența va fi egală cu $\frac{2\pi}{1024} 64$.

Dacă reprezentăm cele două componente separat, vedem că avem un cosinus (cu 64 de perioade/1024 de puncte) și mai avem o componentă suplimentară de zgomot.

SINTEZĂ: generatorul de exponențiale complexe

$$w_k[n] = e^{j(\frac{2\pi}{N}kn + \phi_k)}$$



28

SLIDE 28

Până acum am privit DFT ca pe un instrument de analiză a semnalului.

Ne oprim, în cele ce urmează, asupra proprietăților de sinteză ale DFT, și urmărim cum construim semnalul pornind de la coeficienții DFT.

Pentru a înțelege mai bine cum funcționează formula de reconstrucție DFT, este util să ne imaginăm generatorul sinusoidal standard care lucrează pe una dintre frecvențele standard din baza Fourier.

Considerăm o exponențială complexă de frecvență $\frac{2\pi}{N}k$, deci un multiplu de $\frac{2\pi}{N}$, și cu o fază inițială ϕ_k . Modul în care acest generator funcționează este prin generarea succesivă a punctelor de pe cercul unitar, începând de la faza inițială ϕ_k și înaintând în pași egali cu $\frac{2\pi}{N}k$.

SIMBOL UTILIZAT

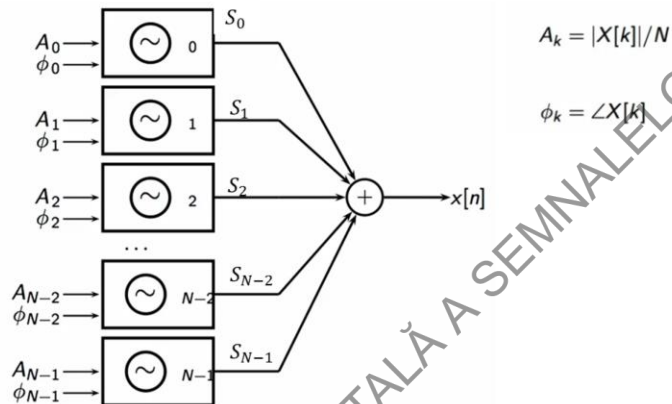


29

SLIDE 29

Vom simboliza acest generator printr-un bloc precum cel figurat, foarte clar ca notație.

SINTEZA SEMNALULUI



30

SLIDE 30

Se consideră un număr de N astfel de generatoare.

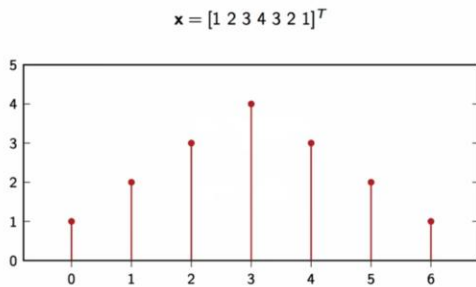
Se fixează frecvența celui de-al k -lea generator (la valoarea: $\omega_k = \frac{2\pi}{N}k$).

Se fixează amplitudinea A_k a celui de-al k -lea generator (la valoarea $|X_k|/N$, unde $|X_k|$ corespunde valorii absolute a celui de-al k -lea coeficient DFT).

Se fixează faza inițială ϕ_k a celui de-al k -lea generator (la valoarea $\angle X_k$, ce corespunde valorii fazei celui de-al k -lea coeficient DFT).

Se dă startul pentru toate generatoarele la același moment și se însumează rezultatele S_k ale ieșirilor. Rezultatul însumării ieșirilor va fi chiar $x[n]$.

EXEMPLU



k	A_k	ϕ_k
0	2.2857	0.0000
1	0.7213	-2.6928
2	0.0440	0.8976
3	0.0919	-1.7952
4	0.0919	1.7952
5	0.0440	-0.8976
6	0.7213	2.6928

31

SLIDE 31

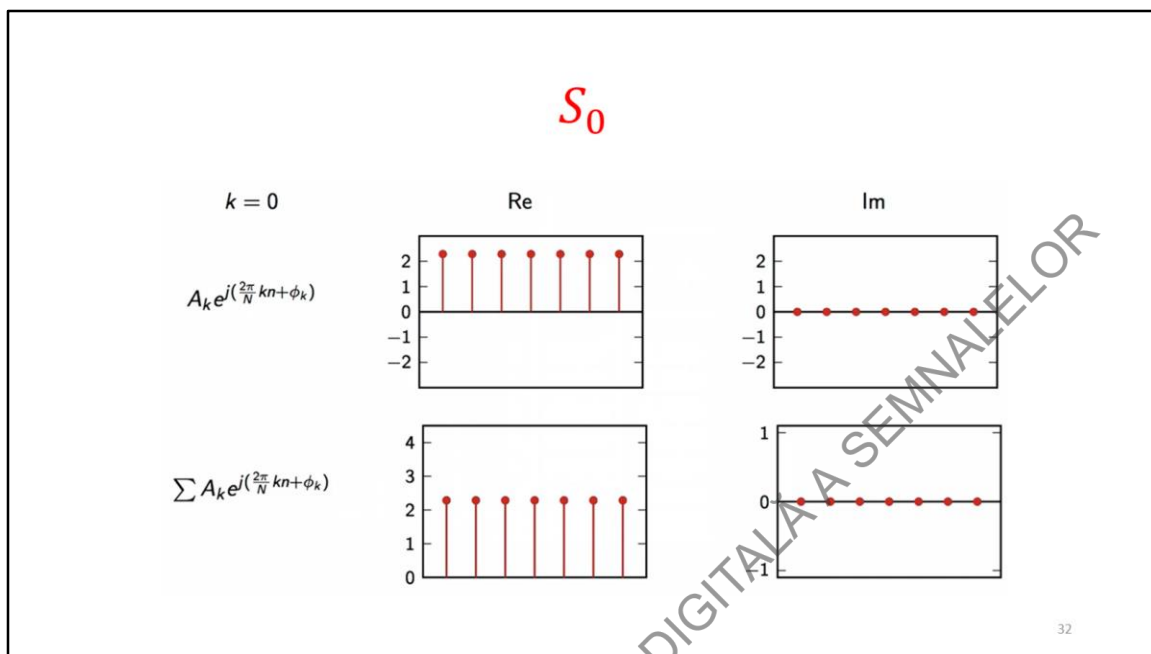
Să considerăm semnalul din figură, de formă triunghiulară. Efectuăm pentru acesta analiza Fourier, obținând cei șapte coeficienți Fourier enumerați în tabel, în termeni de amplitudine și fază.

Inițializăm cele șapte generatoare cu A_k și ϕ_k , obținute în partea de analiză.

Vom însuma ieșirile S_k pentru a obține semnalul original.

Vor urma, de fapt, șapte pași în care culegem pe ieșire, succesiv:

$$\begin{aligned}
 &S_0 \\
 &S_0 + S_1 \\
 &S_0 + S_1 + S_2 \\
 &\dots \\
 &S_0 + S_1 + \dots + S_6
 \end{aligned}$$



SLIDE 32

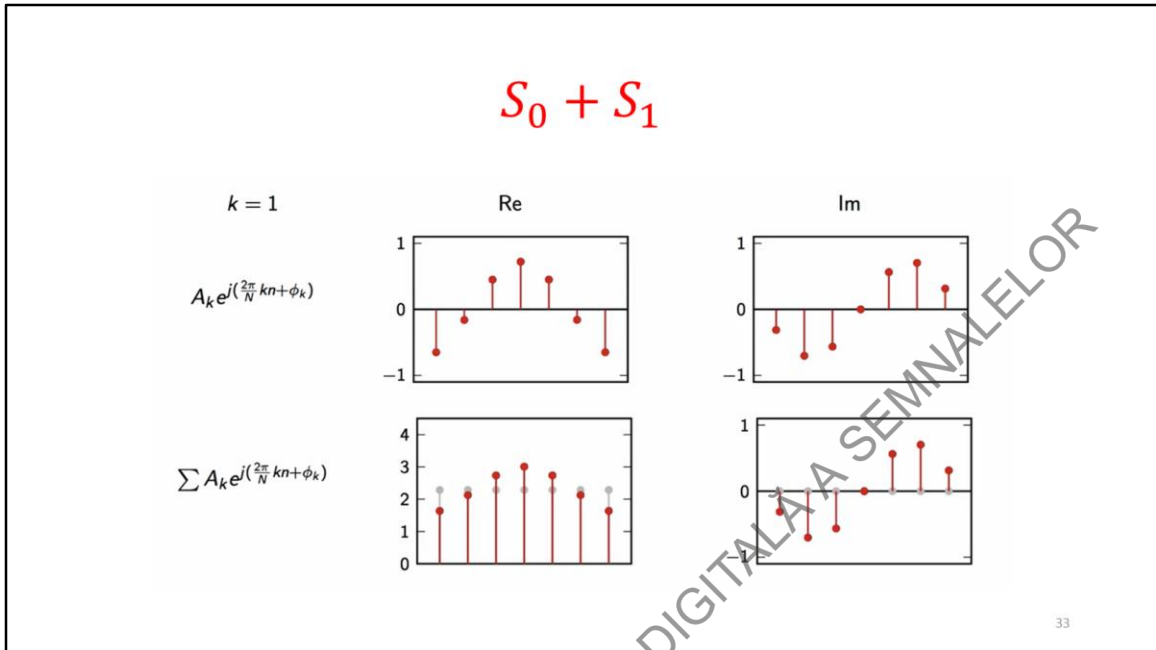
Iată cum procedăm.

Pe linia de sus vom figura, pe rând, ieșirea fiecărui generator, începând de la $k=0$, până la $k=6$.

Pe linia de jos, vom figura suma cumulată a ieșirilor, corespunzătoare fiecăruia dintre cei șapte pași evidențiați anterior (pe măsură ce k parcurge valorile de la 0 la 6).

Primul generator este cel corespunzător lui $k=0$, când frecvența este $\omega_0 = \frac{2\pi}{N}0$, adică 0, iar ieșirea este pur și simplu o constantă, egală cu A_0 .

Suma cumulată are de această dată doar un singur termen $S_0 = A_0$, corespunzător ieșirii primului generator.



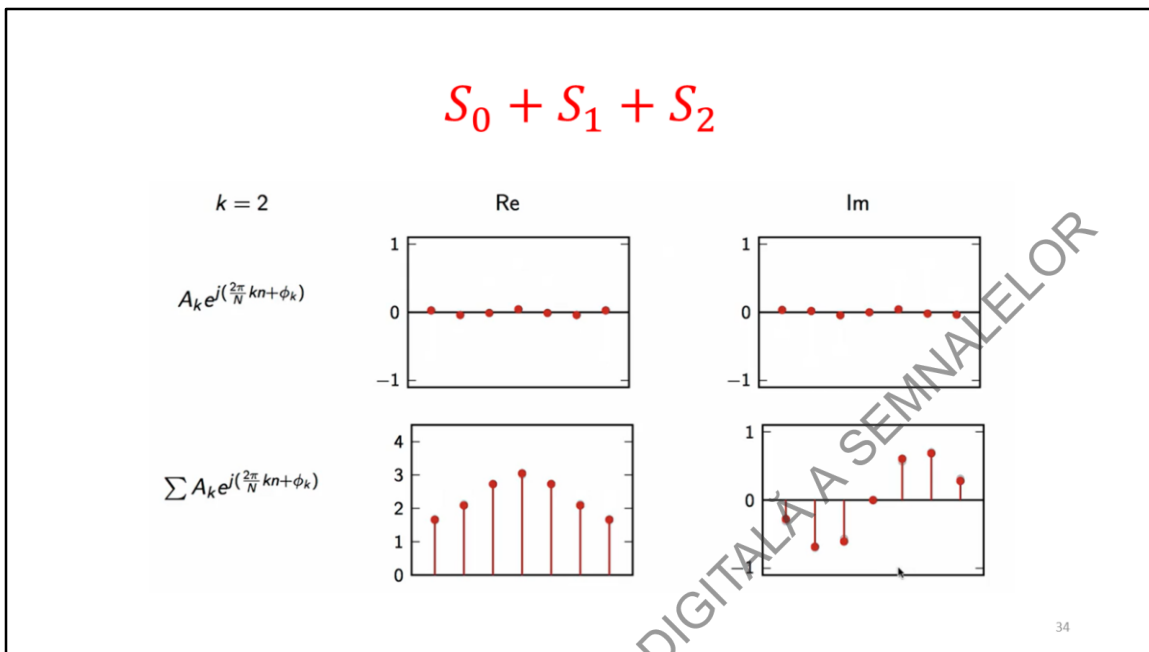
SLIDE 33

Pentru $k=1$ avem o sinusoidă cu o anumită fază inițială ϕ_1 și o anumită amplitudine A_1 . Suma cumulată va avea acum doi termeni, corespunzători ieșirilor primelor două generatoare: $S_0 + S_1$.

Ce am avut pe prima ieșire este figurat cu gri, iar ce se adaugă acum, corespunzător ieșirii celui de-al doilea generator, este figurat cu roșu.

Observăm că partea reală a semnalului începe să arate ca un triunghi.

Avem, de asemenea, o parte imaginară semnificativă, neneglijabilă, care va trebui să dispară în cele din urmă (amintiți-vă că am plecat de la semnalul triunghiular real și la el trebuie să ajungem).



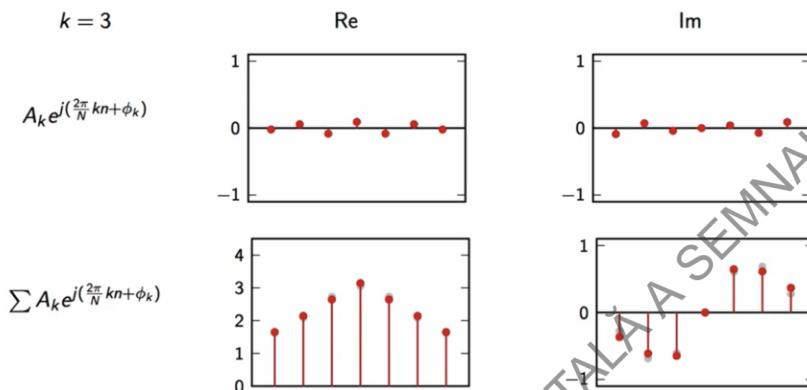
SLIDE 34

La al treilea pas, suma cumulată va îngloba ce am obținut anterior și este figurat cu gri, la care se adaugă ceea ce se culege pe ieșirea celui de-al treilea generator, corespunzător lui $k=2$ și figurat cu roșu.

Suma cumulată va fi: $S_0 + S_1 + S_2$

Pe măsură ce avansăm vedem că amplitudinea este foarte mică și vor fi doar mici ajustări ale sumei. Este foarte dificil să vezi diferența dintre acest pas și pasul precedent.

$$S_0 + S_1 + S_2 + S_3$$

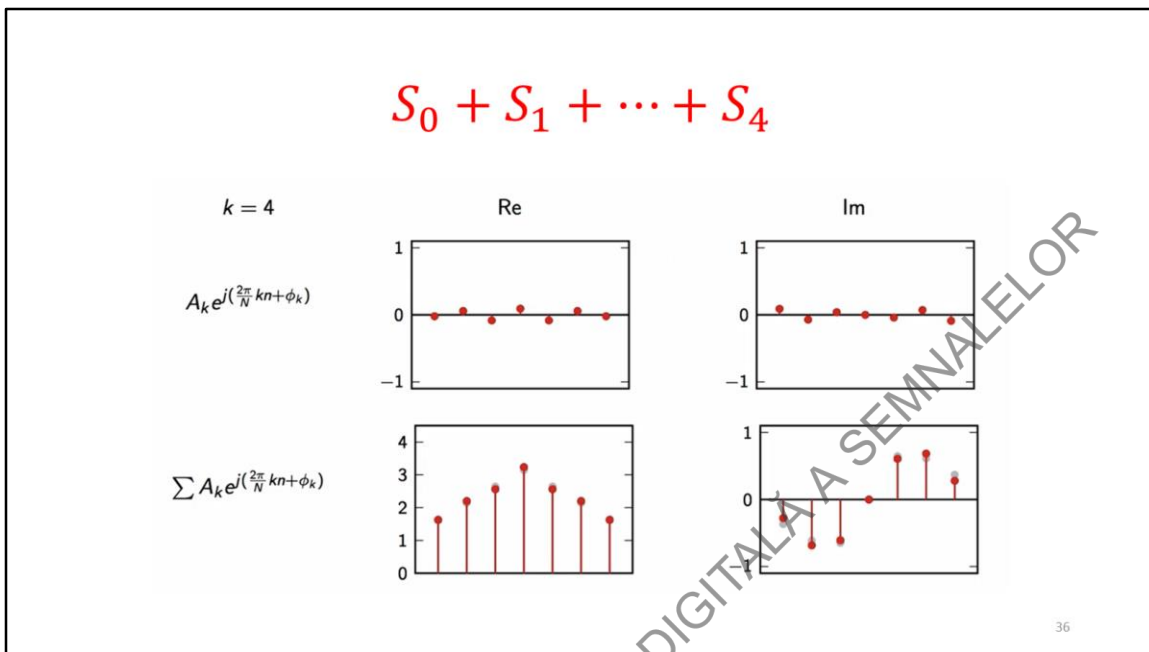


35

SLIDE 35

Facem al patrulea pas: $S_0 + S_1 + S_2 + S_3$, pentru $k=3$.

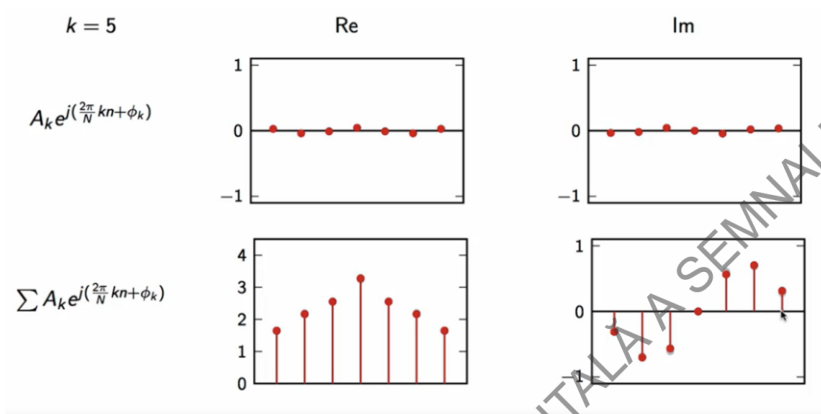
Aici totul este foarte asemănător cu ce am obținut la pasul anterior, având doar mici ajustări.



SLIDE 36

La al cincilea pas, când obținem $S_0 + S_1 + \dots + S_4$ pentru $k=4$, ajungem în partea din spectru corespunzătoare parcurgerii în sens invers acelor de ceasornic. Au loc mai multe ajustări și începe să se reducă partea imaginară la zero.

$$S_0 + S_1 + \dots + S_5$$

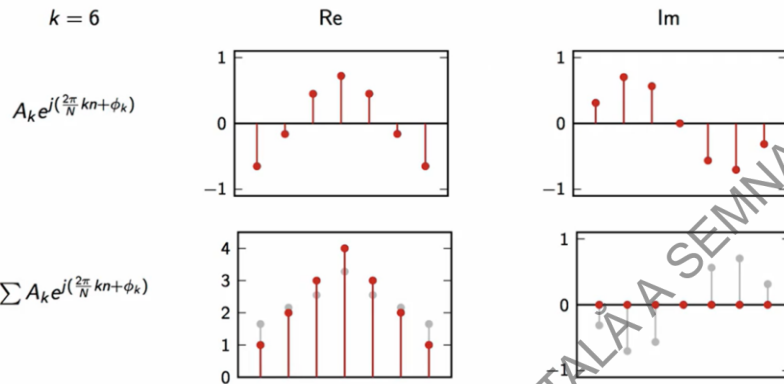


37

SLIDE 37

Aici observați o altă ușoară ajustare.

$$S_0 + S_1 + \dots + S_6$$

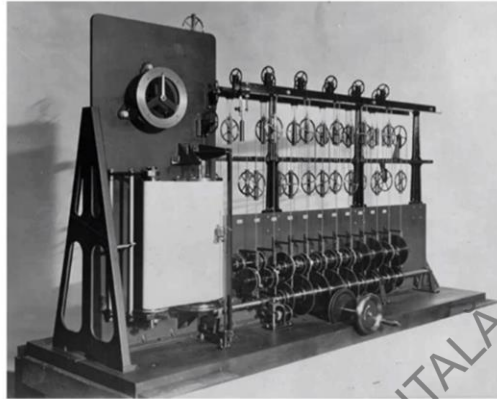


38

SLIDE 38

În cele din urmă, când $k=6$, ultimul coeficient va anihila partea imaginară și ne va returna exact semnalul triunghiular, pe care îl așteptam.

Lordul Kelvin și prezicerea mareelor

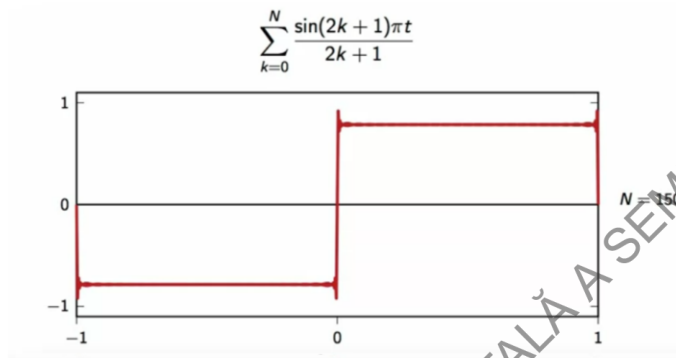


39

SLIDE 39

Mașini asemănătoare de reconstrucție a semnalului au fost folosite în trecut pentru a prezice mareele. Marea este un fenomen periodic la care odată ce i-ai determinat caracteristicile, poți folosi datele experimentale pentru a prezice evoluția mării ca o suprapunere de componente sinusoidale. Mașina, care a fost inițial inventată de Lordul Kelvin, nu este altceva decât o implementare mecanică a unei mașini de reconstrucție DFT.

Amintiți-vă utilizarea bazei Fourier în cazul semnalului dreptunghiular



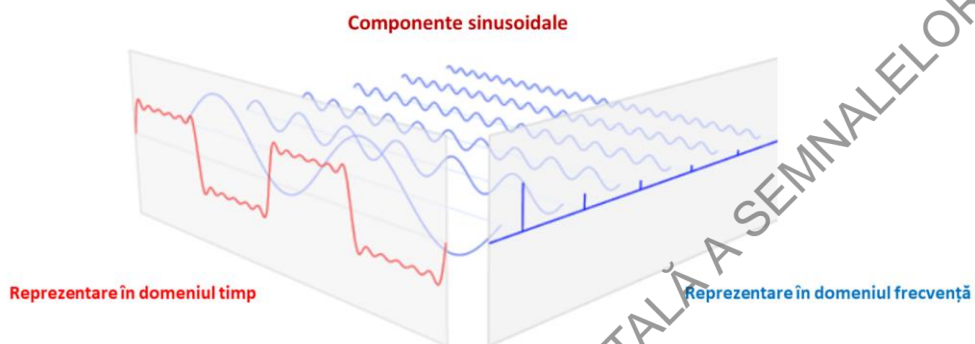
Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

40

SLIDE 40

Pentru a înțelege mai bine ce înseamnă domeniul timp și domeniul frecvență, haideți să ne reamintim exemplul utilizării bazei Fourier pentru semnalul dreptunghiular, așa cum am făcut-o la momentul prezentării acestuia și a punerii în evidență a fenomenului Gibbs. Semnalul s-a recompus din combinația liniară de sinusoidă evidențiată. Am văzut că cu cât N este mai mare, cu atât aproximarea este mai bună.

Domeniu timp vs domeniu frecvență



41

SLIDE 41

În desenul din figură, realizat doar pentru o mai bună înțelegere a termenilor, observați comparația făcută între reprezentările în domeniul timp și în domeniul frecvență.