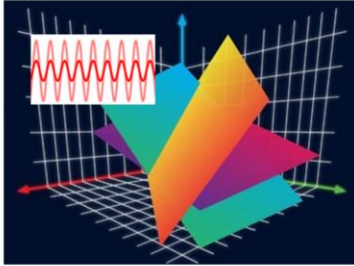


CURSUL 5



SUBSPAȚIU VECTORIAL. EXEMPLE.
APROXIMARE ȘI PROPRIETĂȚI. EXEMPLE.
CONSTRUCȚIA UNEI BAZE ORTONORMALE. ALGORITMUL GRAM-SCHMIDT.
POLINOAME LEGENDRE.
APROXIMAREA ȘI EROAREA APROXIMĂRII. NORMA ERORII.

CORPUL UMAN ȘI TRANSFORMATA FOURIER.
TRANSFORMATA FOURIER PENTRU SEMNALE DISCRETE DE LUNGIME FINITĂ
BAZA FOURIER PENTRU $\mathbb{C}^N$. Scrierea cu semnale și vectori a acesteia.
EXEMPLU: VECTORII BAZEI FOURIER PENTRU CAZUL $\mathbb{C}^{64}$. INTERPREȚĂRI.

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

1

SLIDE 1

Una dintre cele mai mari realizări ale procesării digitale a semnalelor este capacitatea de a comprima eficient informația înainte de a fi transmisă. Acesta este și motivul pentru care ne putem bucura de atât de mult conținut digital pe o varietate întreagă de dispozitive fixe și mobile.

Vom vedea, mai târziu, cum se transpune problema compresiei în termeni de operare în spații vectoriale.

Vom începe prin a prezenta conceptul de subspațiu vectorial, apoi vorbim despre aproximări și vom continua prin aproximarea unei funcții folosind polinoame Legendre, metodă care se va dovedi a fi mai eficientă decât dezvoltarea în serie Taylor.

O SCURTĂ RECAPITULARE CU PRIVIRE LA CEEA CE AM PARCURS DIN CAPITOLUL DE SPAȚII VECTORIALE

- Am adus argumente importante în favoarea utilizării spațiilor vectoriale în studiul procesării semnalelor
- Am definit spațiul vectorial cu ajutorul axiomelor ce trebuie respectate în cadrul acestei structuri
- Am făcut în permanență analogii și am dat exemple din spații vectoriale ce permit reprezentarea grafică
- Am definit produsul scalar și am insistat pe interpretarea lui ca furnizor al gradului de similitudine (de asemănare) între vectori
- Am definit ortogonalitatea vectorilor, norma unui vector, ortonormalitatea și distanța dintre vectori
- Am formulat definiția bazei spațiului vectorial și am discutat și despre ceea ce înseamnă o bază canonică
- Am stabilit că orice vector din spațiul vectorial se reprezintă în mod unic ca o combinație liniară de vectori ai unei baze a spațiului și am văzut cum putem determina coeficienții din această reprezentare
- Am stabilit cum se procedează pentru schimbarea bazei, dând inclusiv exprimarea matriceală

SLIDE 2

Să facem o scurtă trecere în revistă a celor studiate în cursul trecut.

SUBSPAȚIU VECTORIAL

Subspațiu vectorial - orice submulțime, S , de elemente ale unui spațiu vectorial, V , pentru care, prin operațiile de înmulțire cu scalari și adunare, rezultatul operării aparține tot lui S , indiferent cum se aleg elementele din S cu care se operează.

Cu alte cuvinte, S este o submulțime a lui V , închisă la adunarea și înmulțirea cu scalari.

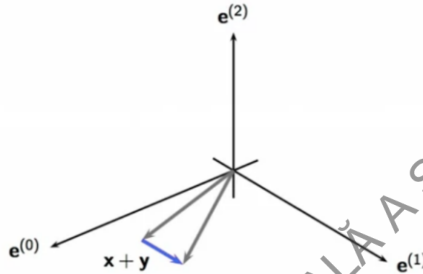
SLIDE 3

Conceptul de subspațiu vectorial este unul foarte simplu.

Subspațiul se compune dintr-o mulțime de vectori din spațiul vectorial considerat care este închisă la adunarea vectorilor și la înmulțirea lor cu scalari.

Planul euclidian $\mathbb{R}^2$ ca subspațiu al spațiului vectorial euclidian $\mathbb{R}^3$

$$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$$



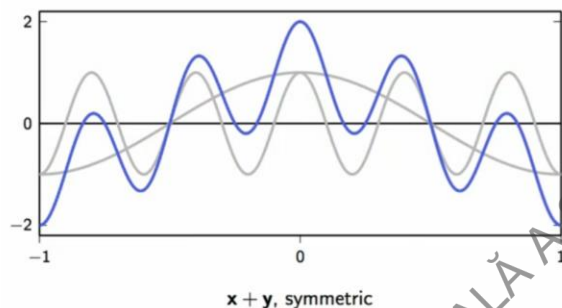
Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

4

SLIDE 4

Exemplul clasic, în acest sens, este planul euclidian ca subspațiu vectorial al spațiului euclidian. Planul este un subspațiu vectorial pentru că oricum am combina vectorii din plan, prin operațiile permise, de adunare și înmulțire cu scalari, rezultatul, adică acea combinație liniară obținută, va rămâne tot în plan și nu va putea niciodată să părăsească planul evadând în a treia dimensiune.

Subspațiul funcțiilor simetrice din $L_2([-1, 1])$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

5

SLIDE 5

Putem extinde conceptul de subspațiu și la spații vectoriale mai complicate, cum sunt spațiile vectoriale de funcții.

Dăm ca exemplu mulțimea funcțiilor simetrice ce aparțin lui $L_2([-1, 1])$.

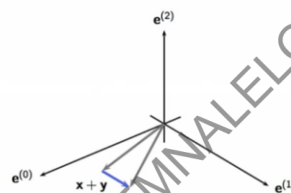
Aceasta este un subspațiu deoarece se poate demonstra că ori de câte ori luăm o combinație liniară de funcții pare (simetrice) pe acest interval, vom ajunge tot la o funcție pară (simetrică). Exemplificăm, pentru înțelegere, cu funcțiile $\cos(\pi t)$ și $\cos(5\pi t)$, funcții pare pe acest interval, ambele simetrice în jurul lui 0. Observăm că dacă le însumăm, rezultatul va fi și el unul simetric în jurul lui 0.

Subspațiile vectoriale au baze lor vectoriale proprii

Baza vectorială a lui $\mathbb{R}^2$ în $\mathbb{R}^3$

$\mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$

$$\mathbf{e}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{e}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

6

SLIDE 6

Un subspațiu vectorial are propria lui bază. De exemplu, luați în considerare planul ca parte a spațiului tridimensional.

Baza canonică a spațiului este formată din vectorii:

$$\mathbf{e}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{e}^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

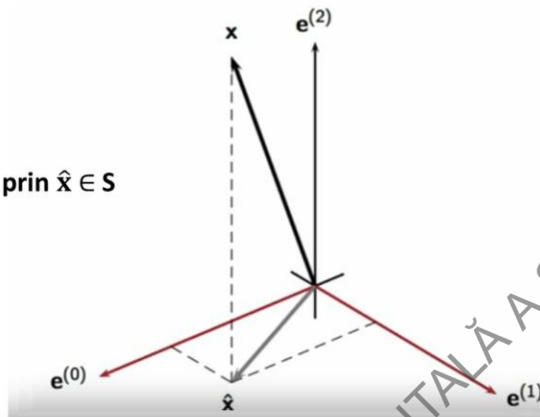
Dacă luăm în considerare doar planul orizontal ca subspațiu, o bază pentru acesta va fi formată din $\mathbf{e}^{(0)}$ și $\mathbf{e}^{(1)}$.

APROXIMARE: $\hat{x}$

1) Vector $x \in V$

2) Subspațiu $S \subseteq V$

3) Aproximăm $x \in V$ prin $\hat{x} \in S$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

7

SLIDE 7

Ajungem acum la *problema aproximării*.

Să presupunem că avem un vector x dintr-un spațiu vectorial V . Exemplificăm, pentru înțelegere, cu un vector din spațiul tridimensional.

Considerăm acum un subspațiu S al lui V . Spre exemplu, planul orizontal din figură.

Problema pe care ne-o punem este să-l aproximăm pe x folosind doar elemente din acest subspațiu S , adică din respectivul plan.

Intuitiv, răspunsul este dat de proiecția vectorului x pe acest plan și aceasta va fi și aproximarea noastră.

Cea mai bună aproximare liniară a vectorului x : $\hat{x}$

Considerăm o bază ortonormală a subspațiului S al lui V :

$$\{s^{(k)}\}_{k=0,1,\dots,K-1}$$

Proiecția ortogonală a vectorului $x \in V$ pe subspațiul $S \subseteq V$ se notează cu $\hat{x} \in S$ și se numește **cea mai bună aproximare liniară a vectorului x din V pe subspațiul S** , fiind definită prin:

$$\hat{x} = \sum_{k=0}^{K-1} \langle s^{(k)}, x \rangle s^{(k)}$$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

8

SLIDE 8

Putem extinde această abordare geometrică a aproximării și la un spațiu vectorial oarecare. Vom defini conceptul de proiecție ortogonală în termeni abstracti, tocmai în vederea generalizării noțiunii de aproximare.

Considerăm o bază ortonormală a subspațiului S al lui V , notată cu

$$\{s^{(k)}\}_{k=0,1,\dots,K-1}$$

Proiecția ortogonală a unui vector x din V pe acest subspațiu S este definită astfel:

$$\hat{x} = \sum_{k=0}^{K-1} \langle s^{(k)}, x \rangle s^{(k)}$$

Proprietăți importante ale lui $\hat{x}$

- Aproximarea, $\hat{x}$, și eroarea aproximării, $(x - \hat{x})$, sunt ortogonale:

$$\langle \hat{x}, x - \hat{x} \rangle = 0$$

- Minimizează distanța dintre vectorul original x și orice alt vector y din S :

$$\arg \min_{y \in S} \|x - y\| = \hat{x}$$

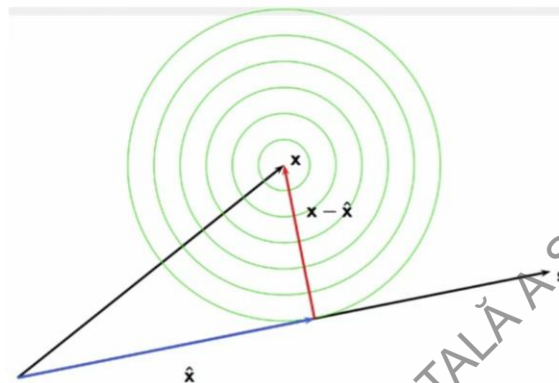
SLIDE 9

Aceasta are două proprietăți fundamentale. Ele sunt redată în slide.

Prima proprietate este aceea că aproximarea și eroarea aproximării sunt ortogonale.

A doua proprietate evidențiază faptul că proiecția ortogonală este vectorul care minimizează distanța dintre vectorul original și oricare alt vector al subspațiului.

Un exemplu ilustrativ: subspațiul $\mathbb{R}$ al lui $\mathbb{R}^2$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

10

SLIDE 10

Pe cazul particular al subspațiului $\mathbb{R}$ al lui $\mathbb{R}^2$, aceste proprietăți se evidențiază foarte clar.

EXEMPLU: Aproximarea polinomială

- Considerăm spațiul vectorial $P_N([-1, 1]) \subset L_2([-1, 1])$
- Elementele acestui spațiu sunt de forma:
$$p = a_0 + a_1 t + \dots + a_{N-1} t^{N-1}$$
- Este evident că o bază a acestui spațiu vectorial este cea formată din:
$$s^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} t^k, \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$
- Această bază nu este, însă, ortonormală

SLIDE 11

Luăm acum în considerare spațiul vectorial ale funcțiilor de pătrat integrabil pe intervalul de la -1 la +1, adică: $L_2([-1, 1])$.

Un subspațiu al acestuia este spațiul polinoamelor de grad N , $P_N([-1, 1])$, elementele sale fiind de forma:

$$p = a_0 + a_1 t + \dots + a_{N-1} t^{N-1}$$

Putem vedea că, la fel ca toate polinoamele, acesta este o combinație liniară de puteri crescătoare ale lui t . Este clar că putem exprima orice polinom ca o combinație liniară de vectori $s^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} t^k$. Așadar, o bază imediată a spațiului este formată din puterile lui t până la gradul $(N-1)$. Se poate verifica faptul că această bază nu este una ortonormală. Acești vectori nu sunt nici ortogonali și nici de normă unitară.

Obiectivul pe care ni-l propunem

Dorim să aproximăm $x = \sin t \in L_2([-1, 1])$ în $P_3([-1, 1])$

- Construim o bază ortonormală pornind de la baza identificată
- Proiectăm x peste noua bază ortonormală
- Calculăm eroarea aproximării
- Comparăm rezultatul cu ceea ce ne furnizează aproximarea Taylor (care este binecunoscută, dar nu este una optimă pe acest interval)

SLIDE 12

Pentru a acționa la modul concret, să ne alegem un vector candidat x pentru aproximare. Fie acesta $x = \sin t \in L_2([-1, 1])$. Ne propunem să-l aproximăm cu un element din $P_3([-1, 1])$, adică cu un polinom de gradul 2. În mod clar, polinoamele de gradul doi sunt funcții de pătrat integrabil pe intervalul $[-1, 1]$, fiind funcții continue elementare. Așadar, subspațiul considerat este unul legitim ales.

Înainte de toate, însă, va trebui să construim o bază ortonormală pentru $P_3([-1, 1])$. Odată ce avem o astfel de bază, cea mai bună aproximare liniară a lui x va fi proiecția ortogonală a lui x pe subspațiul considerat, scrisă cu ajutorul elementelor acestei noi baze.

Calculăm acum eroarea aproximării și, apoi, facem comparația dintre aceasta și aproximarea obținută prin dezvoltarea în serie Taylor, care este cel mai des folosită aproximare.

Construcția unei baze ortonormale

- Vom folosi algoritmul Gram – Schmidt de ortonormalizare:

pornim de la baza originală $\{s^{(k)}\} \rightarrow$ ajungem la baza ortonormală $\{u^{(k)}\}$

- Procedura utilizată: la fiecare pas k construim

1. $p^{(k)} = s^{(k)} - \sum_{n=0}^{k-1} \langle u^{(n)}, s^{(k)} \rangle u^{(n)}$

2. $u^{(k)} = p^{(k)} / \|p^{(k)}\|$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

13

SLIDE 13

Primul pas pe care îl facem este să construim o bază ortonormală pentru $P_3([-1,1])$. Pentru aceasta vom folosi algoritmul de ortonormalizare Gram-Schmidt.

Vom începe de la baza identificată deja, notată $\{s^{(k)}\}$, și vom ajunge la cea ortonormală dorită, notată $\{u^{(k)}\}$.

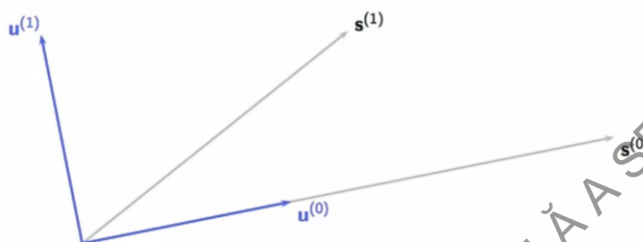
Algoritmul Gram-Schmidt constă într-o procedură iterativă, în care se ia câte un vector din baza inițială și se produce progresiv o bază ortonormală.

Fiecare pas, ce presupune obținerea unui nou vector $u^{(k)}$, se compune din doi subpași.

Primul subpas, ce vizează obținerea unui vector denumit $p^{(k)}$, constă în a lua un vector $s^{(k)}$ și a elimina din el toate componentele sale care sunt coliniare, adică de aceeași direcție, cu vectorii produși în pașii anteriori pentru baza ortonormală, adică cu: $u^{(0)}, u^{(1)}, \dots, u^{(k-1)}$

Al doilea subpas, ce vizează obținerea vectorului $u^{(k)}$, constă în normalizarea vectorului obținut la primul subpas, ce a fost notat cu $p^{(k)}$

Construcția unei baze ortonormale



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

14

SLIDE 14

Să ne uităm la asta grafic, pe un exemplu foarte simplu.

Să presupunem că avem doi vectori în plan, $s^{(0)}$ și $s^{(1)}$, vectori care evident formează o bază deoarece au direcții diferite, însă nu formează o bază ortonormală.

La primul pas se ia primul vector $s^{(0)}$ și îl construim pe $u^{(0)}$.

La primul subpas, deoarece acesta este primul vector, nu ai niciun alt vector, al noii baze, calculat până acum. Prin urmare considerăm

$$p^{(0)} = s^{(0)}$$

Tot ce trebuie să facem acum este să urmărim al doilea subpas al procedurii, adică să normalizăm vectorul $p^{(0)}$, obținând un vector de lungime 1, notat cu $u^{(0)}$.

La al doilea pas, luăm acum al doilea vector, $s^{(1)}$, și vedem că acesta nu este ortogonal (perpendicular) cu $u^{(0)}$. Am putea spune că ei au o oarecare „directionalitate” în comun. Ideea este de a elimina din $s^{(1)}$ toate componentele care pot fi captate de $u^{(0)}$.

Pentru a face acest lucru, proiectăm $s^{(1)}$ pe $u^{(0)}$, proiecția ortogonală fiind vectorul (colorat portocaliu), adică $\langle u^{(0)}, s^{(1)} \rangle u^{(0)}$. Apoi se scade această proiecție din $s^{(1)}$ și se obține $p^{(1)}$. Atenție, însă, este vorba de o scădere vectorială! Evident, $p^{(1)}$ este ortogonal cu $u^{(0)}$.

Singurul lucru care ne mai rămâne de făcut acum, pentru a-l obține pe $u^{(1)}$, este să-l normalizăm pe $p^{(1)}$, și astfel obținem imediat al doilea vector al bazei ortonormale dorite.

Trecem la aplicarea algoritmului Gram - Schmidt

Pornim de la baza originală $\{s^{(k)}\} = \{1, t, t^2\} \rightarrow$ Ajungem la baza ortonormală $\{u^{(k)}\} = \{u^{(0)}, u^{(1)}, u^{(2)}\}$

Ținem cont că produsul scalar în $L_2([-1, 1])$ se definește prin:

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt \Rightarrow \|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 x^2(t)dt$$

- ▶ $s^{(0)} = 1$
 - $p^{(0)} = s^{(0)} = 1$
 - $\|p^{(0)}\|^2 = 2$
 - $u^{(0)} = p^{(0)} / \|p^{(0)}\| = \sqrt{1/2}$
- ▶ $s^{(1)} = t$
 - $\langle u^{(0)}, s^{(1)} \rangle = \int_{-1}^1 t / \sqrt{2} = 0$
 - $p^{(1)} = s^{(1)} = t$
 - $\|p^{(1)}\|^2 = 2/3$
 - $u^{(1)} = \sqrt{3/2} t$

- ▶ $s^{(2)} = t^2$
 - $\langle u^{(0)}, s^{(2)} \rangle = \int_{-1}^1 t^2 / \sqrt{2} = 2/3\sqrt{2}$
 - $\langle u^{(1)}, s^{(2)} \rangle = \int_{-1}^1 t^3 / \sqrt{2} = 0$
 - $p^{(2)} = s^{(2)} - (2/3\sqrt{2})u^{(0)} = t^2 - 1/3$
 - $\|p^{(2)}\|^2 = 8/45$
 - $u^{(2)} = \sqrt{5/8}(3t^2 - 1)$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

15

SLIDE 15

Aplicăm acum procedura de ortonormalizare pentru baza $\{s^{(k)}\} = \{1, t, t^2\}$, identificată în cazul polinoamelor din $P_3([-1, 1])$.

Ținem cont că produsul scalar definit în $L_2([-1, 1])$, și implicit și în subspațiul $P_3([-1, 1])$ al acestuia, este dat de:

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t)y(t)dt.$$

Prin urmare, norma unui vector se calculează prin: $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \int_{-1}^1 x^2(t)dt$.

Având în vedere toate acestea, parcurgem procedura de ortonormalizare și urmărim pe slide rezultatele ce se obțin în urma calculelor.

Aplicarea algoritmului Gram – Schmidt
permite obținerea unei baze ortonormale
 $\{\mathbf{u}^{(k)}\} = \{\mathbf{u}^{(0)}, \mathbf{u}^{(1)}, \dots, \mathbf{u}^{(N-1)}\}$ pentru $P_N[-1, 1]$

$$\mathbf{u}^{(0)} = \sqrt{1/2}$$

$$\mathbf{u}^{(1)} = \sqrt{3/2} t$$

$$\mathbf{u}^{(2)} = \sqrt{5/8}(3t^2 - 1)$$

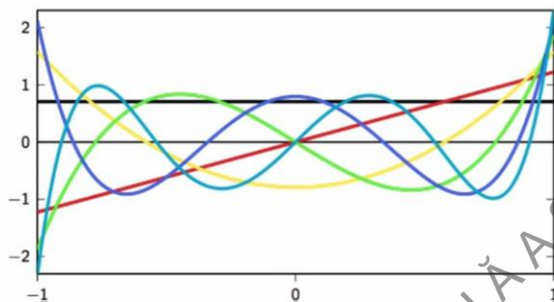
$$\mathbf{u}^{(3)} = \dots$$

Polinoame
Legendre

SLIDE 16

După cum puteți vedea, procedura este destul de laborioasă și nu pare foarte interesantă. Dar, ceea ce obținem în cele din urmă, este un set de polinoame ortonormale, pentru intervalul $[-1, 1]$. Aceste polinoame sunt cunoscute sub denumirea de *polinoame Legendre*. Desigur, se pot calcula polinoamele Legendre de orice grad.

Polinoamele Legendre



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

17

SLIDE 17

Aici le figurăm doar pe primele șase, de la cel de gradul 0, până la cel de gradul 5.

Proiecția ortogonală pe $P_3([-1, 1])$

Încercăm să-l aproximăm pe $x = \sin t \in L_2([-1, 1])$ în $P_3([-1, 1])$.

$$\alpha_k = \langle \mathbf{u}^{(k)}, \mathbf{x} \rangle = \int_{-1}^1 u_k(t) \sin t \, dt$$

- ▶ $\alpha_0 = \langle \sqrt{1/2}, \sin t \rangle = 0$
- ▶ $\alpha_1 = \langle \sqrt{3/2} t, \sin t \rangle \approx 0.7377$
- ▶ $\alpha_2 = \langle \sqrt{5/8}(3t^2 - 1), \sin t \rangle = 0$

SLIDE 18

Revenind la problema noastră de aproximare, încercăm să-l aproximăm pe $x = \sin t \in L_2([-1, 1])$ în $P_3([-1, 1])$.

Știm că cea mai bună aproximare va fi dată de proiecția ortogonală a lui $\sin t$ peste setul de polinoame Legendre, până la gradul 2, puse deja în evidență.

Calculăm coeficienții de interes folosind produsul scalar dintre polinoamele Legendre și funcția $\sin t$, pe care dorim să o aproximăm. Rezultatele care se obțin le avem pe slide.

Aproximarea lui $\sin t$ folosind proiecția ortogonală pe $P_3([-1, 1])$

Folosind valorile găsite anterior obținem:

$$\sin t \approx \alpha_0 u^{(0)} + \alpha_1 u^{(1)} + \alpha_2 u^{(2)} = \alpha_1 u^{(1)} \approx 0,9035t$$

Folosind binecunoscuta dezvoltare în serie Taylor se obține:

$$\sin t \approx t$$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

19

SLIDE 19

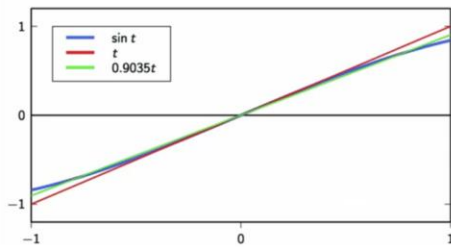
Așadar, proiecția ortogonală a lui $x = \sin t$ peste $P_3([-1, 1])$ constă dintr-un singur termen, egal cu $0,9035t$.

Acesta este asemănător, dar nu e chiar identic, cu aproximarea standard pentru $\sin t$ în jurul lui 0, dată de dezvoltarea în serie Taylor, și care este egală cu t .

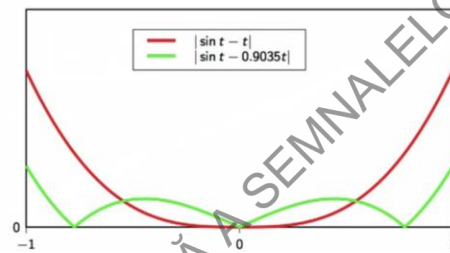
Deci, în ambele cazuri, aproximăm sinusul cu o dreaptă, însă panta este ușor diferită.

APROXIMAREA ȘI EROAREA APROXIMĂRII

APROXIMAREA



EROAREA APROXIMĂRII



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

20

SLIDE 20

Să vedem cum afectează acest lucru rezultatul aproximării.

Dacă reprezentăm grafic funcția $\sin t$, aproximarea Taylor și aproximarea proiecției ortogonale, nu vedem mare diferență.

Dar dacă reprezentăm eroarea aproximării avem rezultatele din grafic. Cu roșu, avem eroarea la aproximarea prin dezvoltare în serie Taylor. Putem vedea că eroarea este foarte mică într-un interval din jurul lui 0, dar apoi tinde să crească pe măsură ce ne îndepărtăm de 0. Acest lucru se datorează faptului că aproximarea Taylor este o aproximare locală.

Pe de altă parte, proiecția ortogonală obținută prin aproximarea Legendre, reprezentată cu verde, realizează o minimizare globală, oferindu-ne o optimizare globală a aproximării.

NORMA ERORII

- În cazul proiecției ortogonale pe $P_3[-1, 1]$ se obține:

$$\|\sin t - \alpha_1 u^{(1)}\| \approx 0.0337$$

- În cazul dezvoltării în serie Taylor se obține:

$$\|\sin t - t\| \approx 0.0857$$

SLIDE 21

Putem calcula distanța între funcția $\sin t$ și aproximant.

În cazul aproximării Legendre pentru $\sin t$, avem că norma erorii (adică eroarea pătratică medie a aproximării) este 0,0337, în timp ce în cazul seriei Taylor, ea este 0,0857.

Avem deci un raport de aproximativ 2,5 între cele două erori pătratice medii.

Black Holes – The Edge of All We Know



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

22

SLIDE 22

Am reluat și aprofundat, în părțile ce ne privesc, o mulțime de lucruri ce țin de spațiile vectoriale.

Evadăm acum puțin în spațiul cosmic... Vă prezint un scurt fragment din filmul documentar recent *Black Holes – The Edge of All We Know*. Să nu credeți că povestea din film nu are legătură cu prelucrarea digitală a semnalelor. Dimpotrivă.

Ce ne pot învăța găurile negre despre granițele cunoașterii? Aceste găuri în spațiu-timp sunt cele mai întunecate obiecte, dar sunt și cele mai strălucitoare. Ele par cele mai simple obiecte, dar sunt și cele mai complexe.

Filmul urmărește în paralel două grupuri puternice de cercetători.

Stephen Hawking este în centrul primului, străduindu-se să demonstreze că găurile negre nu uită trecutul.

Un alt grup, și la acesta doresc să mă opresc, care lucrează la observatoare astronomice amplasate la cele mai mari altitudini din lume, reunesc rezultatele preluate de la toate acestea ca și cum ele ar proveni de la un telescop de dimensiunea Pământului, pentru a capta prima imagine a unei găuri negre. Cantitatea de informație procesată pentru a ajunge la rezultatul final este impresionantă.

M87



SLIDE 23
Imaginea lui M87

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

DE LA CURCUBEU LA TRANSFORMATĂ FOURIER



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 24

În cele ce urmează vom urmări înțelegerea reprezentării semnalelor în domeniul frecvență prin intermediul unui instrument matematic numit *transformată Fourier*. Transformarea Fourier este un instrument fundamental ce poate fi folosit în aproape toate domeniile științifice.

Grecii antici și, mai târziu, oamenii de știință arabi au fost intrigați de fenomenul curcubeului și au încercat în zadar să găsească o explicație științifică pentru acesta. În 1300, un călugăr dominican, Theoderich de Freiberg, a ținut o sticlă de apă la soare și a identificat culorile curcubeului, înțelegând rolul picăturilor de apă în fenomen. Au trecut încă 300 de ani până când Descartes și Newton au oferit o explicație completă a modului în care lumina albă poate fi descompusă în culori. Newton, în special, a conceput un experiment crucial care a demonstrat, o dată pentru totdeauna, că lumina albă este compusă din mai multe frecvențe fundamentale asociate cu diferite culori. Aceasta a dus la nașterea noțiunii de *spectru*.

Personajul principal din restul povestirii este Joseph Fourier, un matematician și fizician francez, din secolul al XIX-lea. Fourier este cel care a furnizat rezultatele matematice necesare înțelegerii a ceea ce Descartes și Newton au descris ca fizicieni. Fourier și-a propus să descompună o funcție, care îndeplinea anumite condiții, într-o sumă de armonici sinusoidale și cosinusoidale. Cum a ajuns la asta? El a scris totul într-o carte, numită *Théorie Analytique de la Chaleur*. Motivul pentru care Fourier a ajuns aici a fost o problemă de fizică. El a dorit să găsească soluția *ecuației căldurii*. Manuscrisul original pare foarte complicat, dar astăzi, datorită notării matematice eficiente și a mijloacelor electronice disponibile în efectuarea calculelor, nu numai că putem înțelege totul destul de ușor, dar și folosim rezultatele evidențiate în viața noastră de zi cu zi. Deși, probabil, adesea nici măcar nu suntem conștienți de asta.

În continuare vom aborda analiza Fourier din punct de vedere intuitiv. Vom începe prin a introduce conceptul de *domeniu frecvență*, cu *domeniul timp* fiind deja familiarizați. Vom vedea apoi că putem folosi noțiunea de spațiu vectorial pentru a explica analiza Fourier ca o schimbare a bazei în spațiul vectorial al semnalelor discrete de lungime finită. În acest scop, vom studia așa-numita *bază Fourier* pentru acest spațiu.

Unde întâlnim oscilațiile?



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 25

Scopul analizei Fourier și a procesării semnalelor este acela de a ne dota cu instrumentele necesare reprezentării unui semnal în termenii componentelor sale sinusoidale de bază.

Acum, înainte de a aborda detaliile matematice ale unei astfel de transformări, este important să ne întrebăm de ce alegem componentele sinusoidale ca elemente de bază ale transformării noastre.

Amintiți-vă că semnalul este, așa cum am mai spus, descrierea unui fenomen fizic care evoluează în timp. Se dovedește că oscilațiile sunt într-adevăr pulsul fundamental al naturii, ca să spunem așa.

Pe slide sunt doar câteva exemple imediate.

Dacă te gândești la bătăile inimii, este clar că acesta este un model periodic, care se tot repetă.

Un tren, de exemplu, are un motor care face roțile să se rotească într-o mișcare circulară.

Valurile, sunt un alt exemplu de flux și reflux periodic, care poate fi modelat de o manieră sinusoidală.

Desigur, și instrumentele muzicale generează sunete prin vibrații pe o anumită frecvență fundamentală.

Toate aceste exemple le-am mai dat pe parcurs și este bine să rămâneți cu imaginea diversă pe care ele ne-o oferă în ceea ce privește oscilațiile.

Oscilațiile sunt prezente peste tot

- Sistemele dinamice durabile se manifestă printr-un comportament oscilatoriu (funcționează în cicluri)
- Intuitiv, lucrurile care nu se manifestă astfel, adică nu funcționează ciclic, nu sunt durabile: bombe, rachete, oamenii, etc.

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 26

Se pare că orice sistem dinamic durabil prezintă un comportament oscilator. Intuitiv, este destul de ușor să vezi că lucrurile care nu se mișcă în cerc vor ajunge, mai devreme sau mai târziu, într-o fundătură.

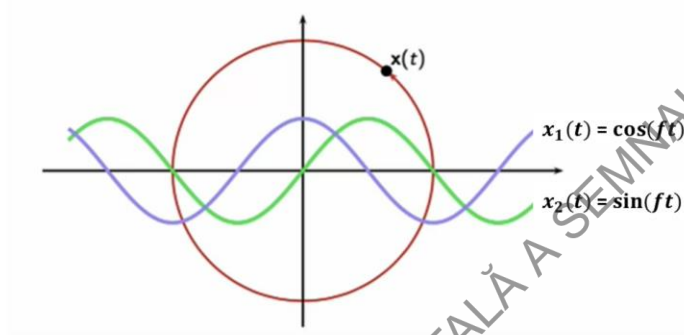
Considerând bombe, o explozie este, în mod clar, un fenomen ireversibil. Este imposibil să readuci înapoi energia degajată. Ne confruntăm cu ceva care se consumă foarte repede și este foarte perturbator.

Rachetele, ard combustibil într-o anumită direcție și trebuie abandonate după ce naveta ajunge pe orbită.

Ființele umane evoluează și ele, din păcate, într-o singură direcție: spre bătrânețe. Ar fi bine dacă ne-am putea reîntoarce la copilărie...

Oscilațiile sunt prezente peste tot

Perioada T
Frecvența $f = 1/T$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 27

Oscilațiile sunt foarte ușor de descris și parametrizat.

Să luăm cazul foarte simplu al unei mișcări circulare în plan. Dacă avem un punct în plan care începe să se miște pe cerc, putem caracteriza această mișcare cunoscând perioada ei, T , adică numărul de secunde necesare pentru ca acest punct să finalizeze o rotație completă. Sau, echivalent, dacă se cunoaște frecvența, f , adică inversa perioadei, $1/T$, care indică câte rotații pe secundă efectuează punctul respectiv.

Dacă plasăm un sistem de coordonate cu centrul în punctul în jurul căruia se produce mișcarea, se pot exprima coordonatele instantanee ale acestui punct din plan, așa cum am mai văzut, prin funcțiile foarte cunoscute *sin* și *cos*, abscisa fiind, pur și simplu,

$\cos(ft)$, iar ordonata $\sin(ft)$, unde cu f este notată frecvența.

Putem considera, așadar, că sinusoidalele și cosinusoidalele sunt un fel de blocuri elementare în jocul foarte complex de lego al naturii.

Vă pot spune că și noi avem, în corpul nostru, un gen de detectoare de semnale sinusoidale. Vă ofer două exemple în acest sens, fără a insista prea mult pe detalii.

Chiar și corpul tău detectează semnale sinusoidale! Cohleea – receptor de vibrații sonore sinusoidale

Pasul 1: Urechea externă

Undele sonore, adică vibrațiile, intră prin urechea externă și ajung în urechea medie pentru a produce vibrații timpanului.

Pasul 2: Urechea medie

Timpanul apoi face oscioarele să vibreze, acestea fiind oase mici în urechea medie. Vibrațiile sonore călătoresc prin oscioare până în urechea internă.

Pasul 3: Urechea internă

Atunci când vibrațiile sonore ajung la cohlee, ating celulele specializate denumite celule păroase. Celulele ciliate transformă vibrațiile în impulsuri nervoase electrice.

Pasul 4: Nervul auditiv

Nervul auditiv conectează cohleea cu centrul auditiv al creierului. Atunci când impulsurile nervoase ajung la creier, acestea sunt interpretate ca sunete.



Cohleea detectează vibrații sonore (sub formă de semnale sinusoidale) cu frecvențe cuprinse între 20Hz și 20kHz

Marin Bancoș - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 28

Primul detector este *cohleea*, din urechea internă, care detectează sinusoidale corespunzătoare undelor sonore, la frecvențe cuprinse între 20Hz și 20KHz. Aveți în figură expus, pe scurt, modul în care funcționează întregul mecanism. Să știți că, într-un fel, cohleea realizează o transformare Fourier instantanee, a undelor sonore care lovesc timpanul.

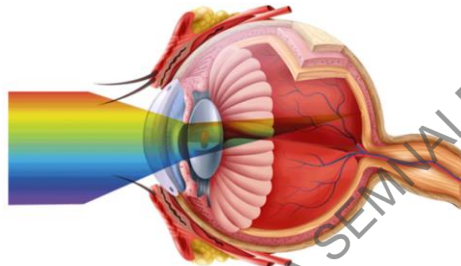
Chiar și corpul tău detectează semnale sinusoidale!

Retina – receptor de sinusoide electromagnetice

RETINA

Țesut fin, delicat, fotosensibil, care conține în principal fotoreceptori. Aceste celule transformă lumina în semnale electrice / impulsuri nervoase procesate mai departe către regiunea posterioară a creierului prin nervul optic.

Retina detectează sinusoide electromagnetice cu frecvențe cuprinse între 430THz și 790THz.



Marin Bancoș - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 29

Al doilea detector, este localizat în ochi, la nivelul retinei, unde există fotoreceptori (conuri și bastonașe), care permit detectarea sinusoidelor electromagnetice cu frecvențe de la 430THz la 790THz. Acesta este intervalul de frecvențe corespunzător luminii în spectrul vizibil.

Deci, se pare că organismul uman realizează analiză de semnale complexe în ceea ce privește componentele de frecvență.

Întrebare fundamentală:

Putem descompune orice semnal în componente sinusoidale?

Răspunsul este **DA**, iar Fourier a demonstrat cum se poate face **exact** acest lucru.

Analiză

Din domeniul timp în domeniul frecvență

Sinteză

Din domeniul frecvență în domeniul timp

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 30

Deși semnalele par a fi descrise perfect ca evoluții ale unor fenomene fizice în timp, și de foarte multe ori le descriem ca atare, există un domeniu diferit, *domeniul frecvență*, la fel de potrivit pentru a descrie fenomenele fizice cum este și *domeniul timp*.

Întrebarea fundamentală pe care ne-o punem este dacă putem descompune orice semnal în componente sinusoidale?

Răspunsul este **da**, iar Fourier ne-a arătat exact cum trebuie să procedăm în acest sens.

Deci, din punct de vedere al *analizei semnalului*, ceea ce vom face este să trecem din domeniul timp în domeniul frecvență. Vom descompune semnalul în componentele de diferite frecvențe care îl constituie, și, procedând astfel, vom putea descoperi noi particularități ale acestuia.

Reversul procesului este întoarcerea din domeniul frecvență în domeniul timp, pentru a realiza *sinteza semnalului* din componentele sale de frecvențe diferite. Putem proceda în acest mod pentru a obține acele semnale al căror conținut este cunoscut în ceea ce privește componentele lor de diferite frecvențe.

Stabilim decorul matematic

- Dăm startul cu cazul semnalului de lungime finită
- Analiza Fourier - o simplă schimbare a bazei
- Schimbarea bazei - o schimbare a perspectivei
- Dacă baza aleasă este potrivită, schimbarea perspectivei facilitează noi descoperiri

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 31

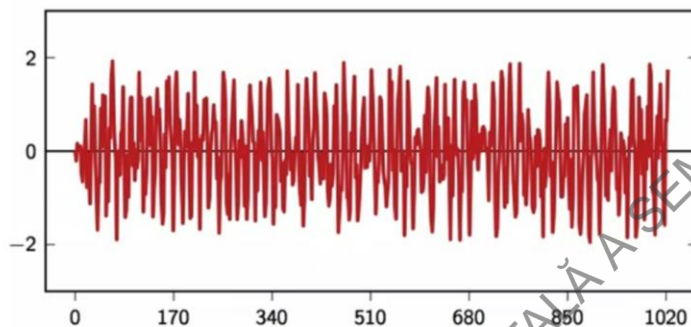
Vom începe cu semnale discrete de lungime finită, deoarece cu acestea se lucrează cel mai ușor, dintre semnalele digitale, din punct de vedere matematic.

Am văzut că un semnal de lungime finită poate fi privit ca un vector din spațiul vectorial $\mathbb{C}^N$, vector ce conține N elemente exprimate, așadar, prin numere complexe.

Analiza Fourier, în acest caz, se va reduce la o schimbare de bază în $\mathbb{C}^N$.

Știm, însă, că o schimbare a bazei oferă o schimbare de perspectivă, iar aceasta ne poate dezvălui lucruri noi prin simplul fapt că privim lucrurile dintr-un alt unghi.

Un semnal misterios... reprezentat în timp discret

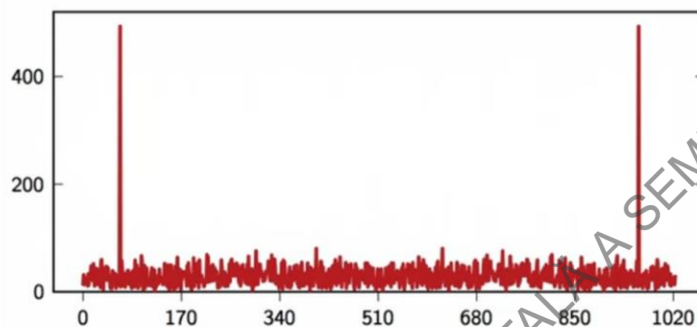


Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 32

Imaginați-vă, spre exemplu, că avem semnalul din figură. Este unul misterios de-a dreptul, pentru că nu putem spune multe lucruri despre el. El este un semnal în timp discret ce conține 1.024 de puncte. Când te uiți la reprezentarea sa în domeniul timp poți desluși un oarecare comportament oscilatoriu, dar nu ne este foarte clar ce se întâmplă.

Semnalul misterios, reprezentat după ce schimbăm baza în una Fourier



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 33

Dacă efectuăm, însă, o schimbare adecvată a bazei, și vom arăta în foarte scurt timp cum se face asta, semnalul va arăta ca în figură.

Deci, folosind baza Fourier, același semnal va avea o nouă reprezentare. Iar în aceasta este clar că ne apar două caracteristici, nesesizabile în prima reprezentare.

În primul rând, apar cele două vârfuri și vom vedea foarte curând ce semnificație au ele.

În al doilea rând, apare ceva care arată ca un zgomot în partea de jos a reprezentării.

Ei bine, analiza Fourier este cea care ne permite să evidențiem aceste două caracteristici care în domeniul timp nu puteau fi observate.

Scrierea cu *semnale* a bazei Fourier pentru $\mathbb{C}^N$

Mulțimea celor N *semnale*, de lungime finită N , din $\mathbb{C}^N$, definite prin:

$$w_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}, \quad \text{unde } k, n = 0, 1, \dots, N-1,$$

respectiv:

$$\{w_k[n]\}_{k=0,1,\dots,N-1} = \{w_0[n], w_1[n], \dots, w_{N-1}[n]\},$$

$$\text{cu: } n = 0, 1, \dots, N-1,$$

este o bază ortogonală pentru $\mathbb{C}^N$, numită *bază Fourier*.

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 34

Aici este dată baza Fourier pentru $\mathbb{C}^N$.

Amintiți-vă de $\mathbb{C}^N$ așa cum l-am definit ca spațiu vectorial.

Deci, vom avea nevoie să folosim în bază N *semnale* diferite, fiecare dintre ele de lungime N .

Indicele k este cel care stabilește numărul de ordine al fiecărui semnal $w_k[n]$ în bază și ia valori între 0 și $(N-1)$.

Fiecare semnal din bază are însă, la rândul său, N elemente (eșantioane).

Prin n vom indica numărul de ordine al elementului (eșantionului) în cadrul semnalului, care și el ia valori tot între 0 și $(N-1)$.

Amintiți-vă, deci, că k este indicele semnalului, iar n este indicele elementului (eșantionului) în fiecare semnal.

Fiecare element se calculează cu ajutorul formulei:

$$w_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Ce înseamnă asta? Avem o exponențială complexă $e^{j\omega n}$, de frecvență $\omega = \frac{2\pi}{N}k$, în care indicele k al semnalului ne furnizează frecvența fundamentală a exponențialei complexe. Admitem, și vom demonstra în curând acest lucru, că mulțimea astfel definită conține N semnale ortogonale în $\mathbb{C}^N$.

Scrierea cu *vectori* a bazei Fourier pentru $\mathbb{C}^N$

Schimbând notațiile, obținem mulțimea de N *vectori*, cu N componente fiecare, ce compun *baza Fourier* pentru $\mathbb{C}^N$, rescrisă astfel:

$$\{w_n^{(k)}\}_{k,n=0,1,\dots,N-1} = \{w_0^{(k)}, w_1^{(k)}, \dots, w_{N-1}^{(k)}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{w^{(k)}\}_{k=0,1,\dots,N-1}$$

unde fiecare $w^{(k)} = w_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} w_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}nk}$ și $n, k = 0, 1, \dots, N-1$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 35

Putem exprima, însă, cele N elemente ale bazei Fourier folosind notația cu *vectori*, exact ca în figură. Superscriptul k din paranteze ne va furniza numărul de ordine al vectorului în bază, iar n pe cel al elementului component în cadrul vectorului.

DETALIAȚ, PENTRU O MAI BUNĂ ÎNȚELEGERE:

- $\{w_0[n], w_1[n], \dots, w_{N-1}[n]\}$ - N semnale, de lungime N fiecare

$$\cdot \left\{ \begin{bmatrix} w_0[0] \\ w_0[1] \\ \vdots \\ w_0[N-1] \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} w_1[0] \\ w_1[1] \\ \vdots \\ w_1[N-1] \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} w_{N-1}[0] \\ w_{N-1}[1] \\ \vdots \\ w_{N-1}[N-1] \end{bmatrix} \right\} - \text{desfășurat}$$

- $\{w_n^{(0)}, w_n^{(1)}, \dots, w_n^{(N-1)}\} \stackrel{\text{def}}{=} \{w^{(0)}, w^{(1)}, \dots, w^{(N-1)}\}$ - N vectori, cu N componente fiecare

$$\overbrace{w^{(k)}}^{\text{notatie vector}} = \overbrace{w_n^{(k)}}^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} \overbrace{w_k[n]}^{\text{notatie semnal}} = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Marin Bancoș - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 36

Pentru a înțelege și mai bine notațiile introduse detaliem puțin. Diferența este numai de notații. Nu avem, însă, nicio diferență între valorile elementelor din notația ca *semnal* sau cea ca *vector*:

$$w^{(k)} = w_n^{(k)} \stackrel{\text{def}}{=} w_k[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

Să ne reamintim modul de generare a exponențialelor complexe

- Componentele vectorului $w^{(0)} = e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 0\cdot n} = e^0 = \cos 0 + j \sin 0$ sunt toate N egale cu 1 și se figurează într-un singur punct.
- Figurăm componentele vectorului

$$w^{(1)} = \begin{bmatrix} w_1[0] \\ w_1[1] \\ \vdots \\ w_1[N-1] \end{bmatrix},$$

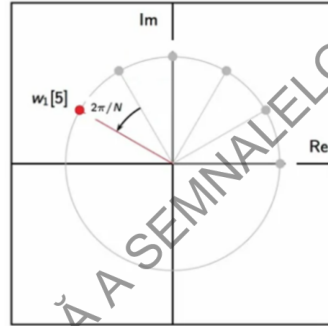
adică: $w^{(1)} = w_n^{(1)} = e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 1\cdot n} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\cdot n\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{N}\cdot n\right)$,
pentru $n = 0, 1, \dots, (N-1)$.

- Pentru:

$$w^{(2)} = w_n^{(2)} = e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot n} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\cdot 2n\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{N}\cdot 2n\right),$$

cu: $n = 0, 1, \dots, (N-1)$, pozițiile pe cerc se iau din 2 în 2 (se dublează frecvența).

...



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 37

Putem vedea imediat cum arată acești vectori dacă ne amintim de modul de generare a exponențialei complexe, utilizat anterior.

Toate cele N componente ale primului vector al bazei, $w^{(0)}$, sunt:

$$w_n^{(0)} \stackrel{\text{def}}{=} w_0[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 0\cdot n} = \cos 0 + j \sin 0 = 1.$$

Toate aceste N componente se reprezintă pe cerc într-un singur punct!

Componentele celui de-al doilea vector al bazei, $w^{(1)}$, sunt date de:

$$w_n^{(1)} = w_1[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 1\cdot n} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\cdot n\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{N}\cdot n\right), \text{ pentru } n = 0, 1, \dots, (N-1).$$

Să vedem cum se reprezintă pe cerc aceste N componente. Observăm că, practic, parcurgem cercul în pași ce corespund unor unghiuri de $\frac{2\pi}{N}$.

În cazul componentelor celui de-al doilea vector din bază, $w^{(2)}$, acestea sunt date de:

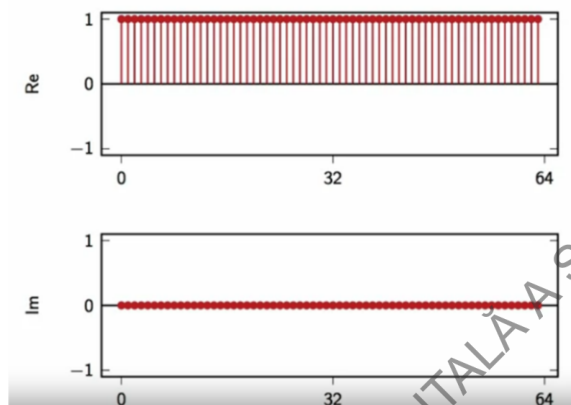
$$w_n^{(2)} = w_2[n] = e^{j\frac{2\pi}{N}\cdot 2\cdot n} = \cos\left(\frac{2\pi}{N}\cdot 2n\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{N}\cdot 2n\right), \text{ pentru } n = 0, 1, \dots, (N-1).$$

În acest caz, la reprezentarea pe cerc a acestor N componente, parcurgem cercul în pași ce corespund unor unghiuri egale cu $\frac{2\pi}{N} \cdot 2$. Frecvența s-a dublat, iar pozițiile anterioare, de la $w^{(1)}$, se ocupă acum pe cerc din 2 în 2.

Similar se procedează și pentru vectorii rămași: $w^{(3)}, w^{(4)}, \dots, w^{(N-1)}$.

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

Vectorul bazei Fourier $w^{(0)} \in \mathbb{C}^{64}$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 38

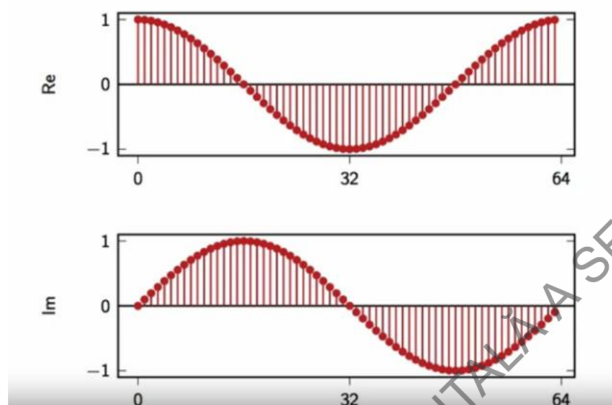
Luăm acum un exemplu concret, fixând $N=64$ și analizând baza Fourier pentru $\mathbb{C}^{64}$.

Vom reprezenta atât componentele reale, cât și pe cele imaginare, pentru fiecare vector din bază.

Acum, dacă vă gândiți la punctul care se mișcă pe cerc în planul complex, partea reală și cea imaginară vor fi, de fapt, cosinusul și sinusul unghiului corespunzător, pe măsură ce punctul se mișcă pe circumferința cercului, așa cum am văzut și în slide-ul precedent.

În cazul primului vector din bază, $w^{(0)}$, toate cele $N = 64$ componente ale sale au partea reală 1 și partea imaginară 0, așa cum am văzut deja. Reprezentarea este cea din figură.

Vectorul bazei Fourier $w^{(1)} \in \mathbb{C}^{64}$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 39

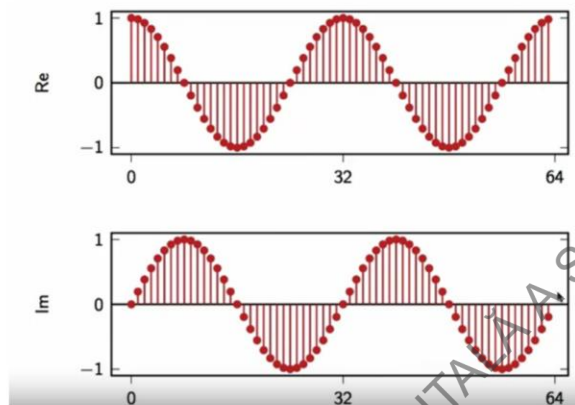
Următorul vector este:

$$w^{(1)} = w_n^{(1)} = e^{j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot 1 \cdot n} = \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot n\right),$$

cu frecvența fundamentală a exponențialei complexe este $\frac{2\pi}{N}$, pentru $N = 64$.

Aceasta înseamnă că punctul va finaliza o rotație completă în 64 de puncte și putem vedea acest lucru și din reprezentările componentelor sale reală și imaginară. Reprezentarea părții reale, a cosinusului, e acoperită prin 64 de eșantioane și corespunde unei perioade complete 2π . Același lucru se întâmplă și la reprezentarea părții imaginare, a sinusului.

Vectorul bazei Fourier $w^{(2)} \in \mathbb{C}^{64}$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

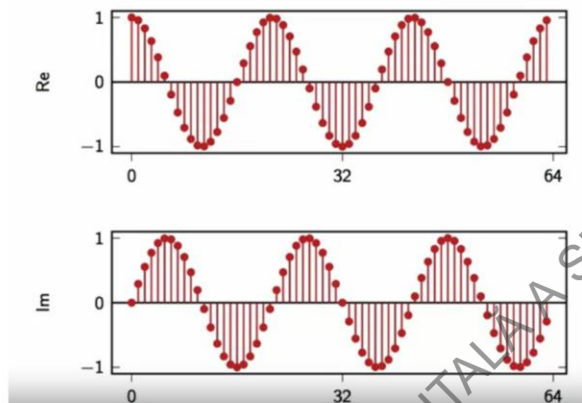
SLIDE 40

Următorul vector corespunde unei mișcări pe cerc de două ori mai rapide:

$$w^{(2)} = w_n^{(2)} = e^{j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot 2 \cdot n} = \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot 2 \cdot n\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot 2 \cdot n\right).$$

Acum frecvența fundamentală a exponențialei complexe este $\frac{2\pi}{N} \cdot 2$, unde $N = 64$. De această dată, cercul e parcurs de două ori, fiind acoperit tot de 64 eșantioane, dar pe două perioade complete $2 \cdot 2\pi = 4\pi$.

Vectorul bazei Fourier $w^{(3)} \in \mathbb{C}^{64}$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 41

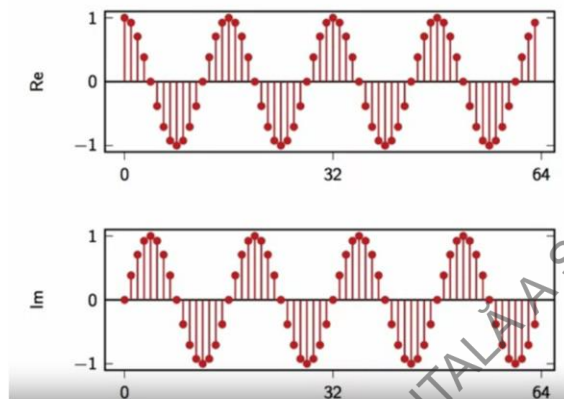
Următorul vector este:

$$w^{(3)} = w_n^{(3)} = e^{j \cdot \frac{2\pi}{N} \cdot 3 \cdot n} = \cos\left(\frac{2\pi}{N} \cdot 3 \cdot n\right) + j \sin\left(\frac{2\pi}{N} \cdot 3 \cdot n\right).$$

Acum frecvența fundamentală a exponențialei complexe este $\frac{2\pi}{N} \cdot 3$, unde $N = 64$.

Acum cercul e parcurs de trei ori, fiind acoperit tot de 64 eșantioane, însă pe trei perioade complete $3 \cdot 2\pi = 6\pi$.

Vectorul bazei Fourier $w^{(4)} \in \mathbb{C}^{64}$

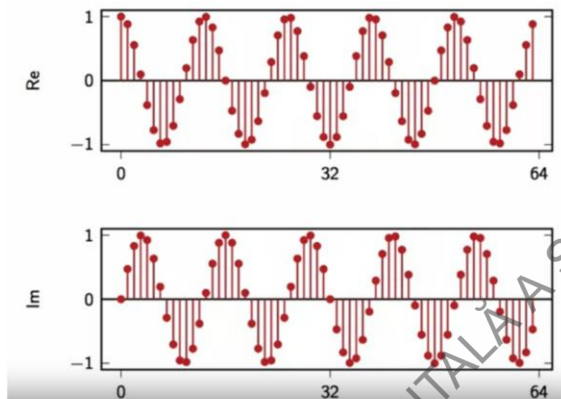


Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 42 ȘI 43

Sigur ați înțeles ce se întâmplă. Lucrurile se petrec similar și pe mai departe. Priviți și la cazurile lui $w^{(4)}$ și $w^{(5)}$. Cele 64 de eșantioane acoperă 4, respectiv 5 perioade complete de 2π . Observăm că distanța dintre eșantioane se tot mărește...

Vectorul bazei Fourier $w^{(5)} \in \mathbb{C}^{64}$...

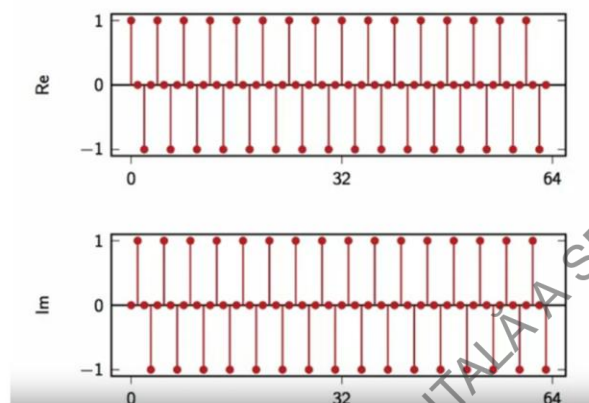


Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 42 ȘI 43

Sigur ați înțeles ce se întâmplă. Lucrurile se petrec similar și pe mai departe. Priviți și la cazurile lui $w^{(4)}$ și $w^{(5)}$. Cele 64 de eșantioane acoperă 4, respectiv 5 perioade complete de 2π . Observăm că distanța dintre eșantioane se tot mărește...

... Vectorul bazei Fourier $w^{(16)} \in \mathbb{C}^{64}$...



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

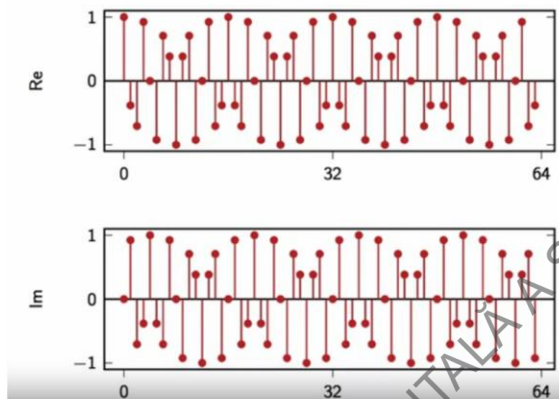
SLIDE 44

Pe măsură ce crește indicele k , mișcarea va fi tot mai rapidă. Din cauza naturii discrete, însă, va fi greu la un moment dat să mai distingem că avem de-a face cu reprezentări de cosinusoide și sinusoide.

În acest caz, de exemplu, pentru $w^{(16)}$, trebuie să vă imaginați că mișcarea surprinde o rotație foarte rapidă pe circumferința cercului. Gândiți-vă că avem doar patru puncte pe cerc, între care „se produce” rotația, deoarece frecvența este: $\omega = \frac{2\pi}{64} \cdot 16 = \frac{\pi}{2}$ (care împarte cercul în 4 segmente egale).

Toate acestea se observă și din reprezentările grafice ale părților reală și imaginară: avem câte 4 eșantioane / 2π !

... Vectorul bazei Fourier $w^{(20)} \in \mathbb{C}^{64}$...

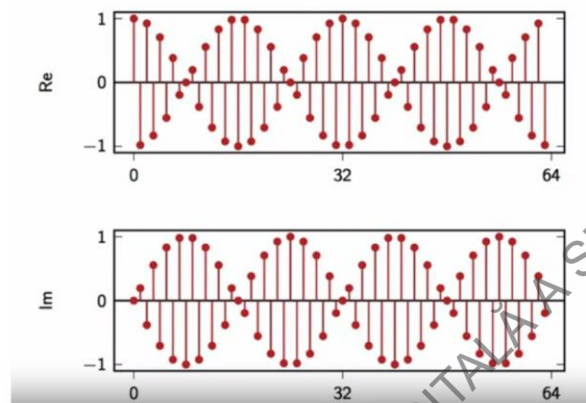


Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 45

Pe măsură ce creștem indicele k al vectorului $w^{(k)}$ din baza Fourier, va crește și frecvența. Dar natura discretă a vectorului va face tot mai greu de înțeles forma semnalului. Avem aici cazul lui $w^{(20)}$.

... Vectorul bazei Fourier $w^{(30)} \in \mathbb{C}^{64}$

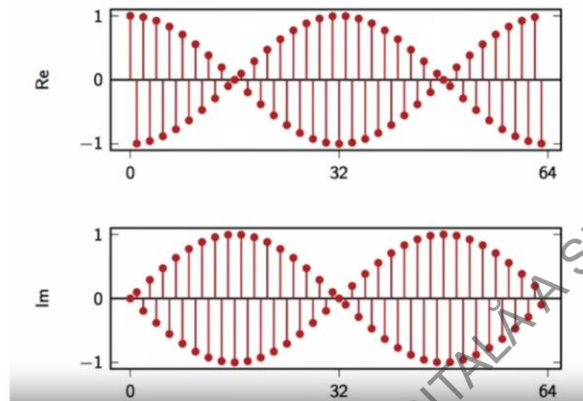


Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 46

Aceeași observație și pentru celelalte cazuri ce urmează. Avem aici reprezentările părții reale și a celei imaginare pentru $w^{(30)}$.

Vectorul bazei Fourier $w^{(31)} \in \mathbb{C}^{64}$

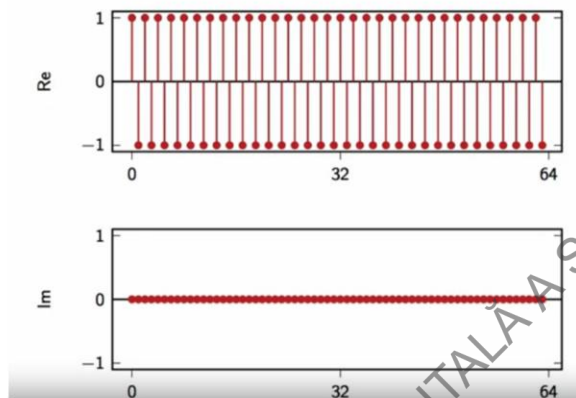


Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 47

Acum, la $w^{(31)}$, suntem deja în intervalul de înaltă frecvență, deoarece semnul eșantioanelor se schimbă la fiecare pas. Această alternanță a semnelor este foarte sugestivă.

Vectorul bazei Fourier $w^{(32)} \in \mathbb{C}^{64}$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

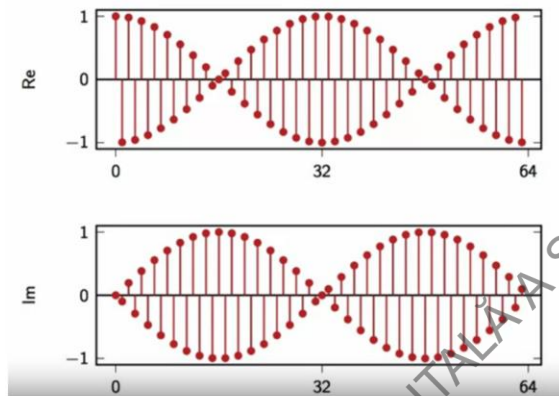
SLIDE 48

În cele din urmă, în cazul lui $w^{(32)}$ ajungem la cea mai înaltă frecvență pe care exponențiala complexă în timp discret o poate avea. Aceasta este frecvența

$$\omega = \frac{2\pi}{64} \cdot 32 = \pi.$$

Vom avea doar două puncte pe cerc, pe +1 și -1, între care „se produce” rotația. Iar acest lucru este clar indicat de componentele reală și imaginară ale vectorului: cea reală alternează între +1 și -1, iar cea imaginară este 0.

Vectorul bazei Fourier $w^{(33)} \in \mathbb{C}^{64}$



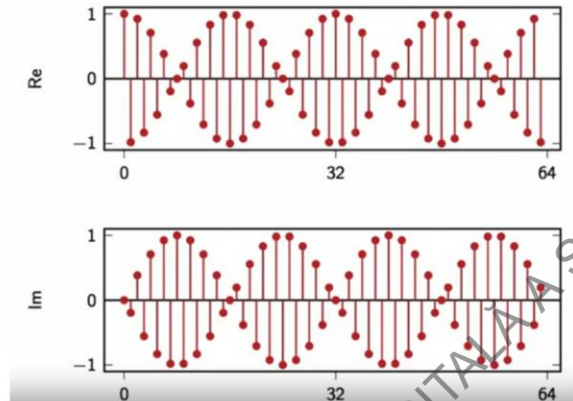
Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 49

Trecând acum la un $\omega > \pi$, pe măsură ce avansăm crescându-l pe k , așa cum am văzut și atunci când am discutat despre exponențiala complexă și fenomenul de „aliasing”, viteza aparentă a punctului scade, iar sensul său de rotație pe cerc se schimbă din sens invers acelor de ceasornic în sensul acelor de ceasornic.

Deci, pe măsură ce indicele k crește între 32 și 63, vedem că viteza aparentă a sinusoidei scade înapoi la 0.

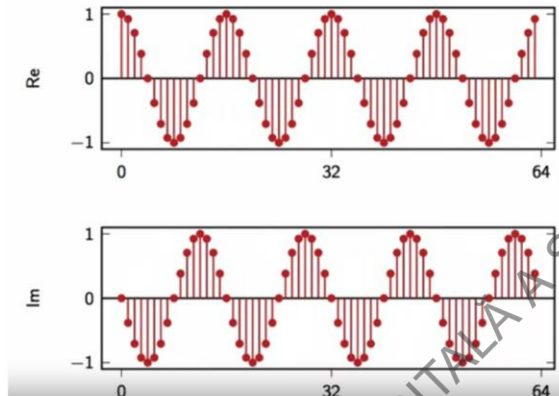
Vectorul bazei Fourier $w^{(34)} \in \mathbb{C}^{64} \dots$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 50

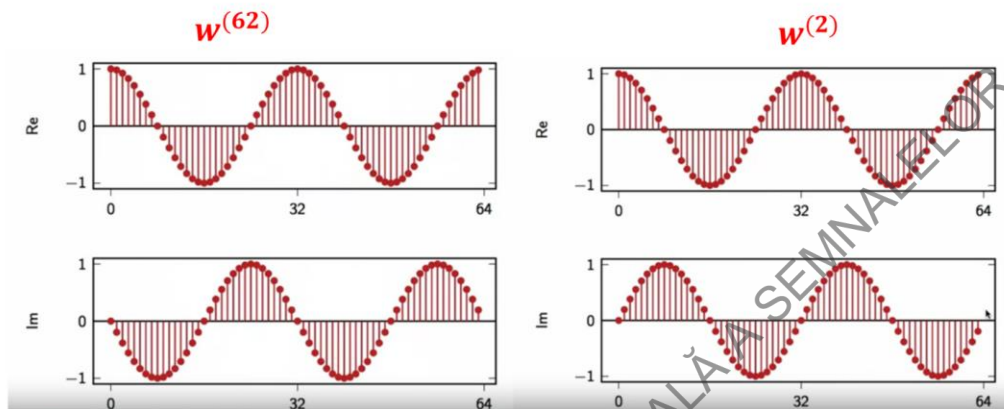
... Vectorul bazei Fourier $w^{(60)} \in \mathbb{C}^{64}$...



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 51

... Vectorul bazei Fourier $w^{(62)} \in \mathbb{C}^{64}$



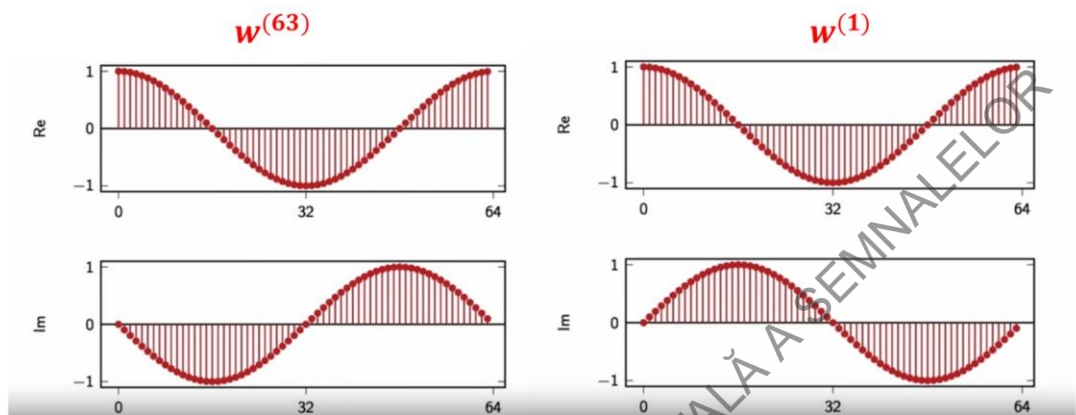
Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 52

Semnalarea faptului că am trecut de π rezultă chiar din reprezentarea părții imaginare, care este inversată față de cea a părții imaginare ce corespunde frecvenței echivalente cu valoare scăzută a indicelui.

Mai concret, aici, de exemplu, puteți compara acest vector al bazei, $w^{(62)}$, cu vectorul bazei $w^{(2)}$, analizat chiar la început, și vedem că partea reală este aceeași, însă partea imaginară are semnul inversat.

Vectorul bazei Fourier $w^{(63)} \in \mathbb{C}^{64} \dots$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 53

Același lucru este valabil și pentru $w^{(63)}$, care are aceeași parte reală cu $w^{(1)}$, însă partea imaginară are semnul inversat.

Demonstrarea ortogonalității vectorilor bazei Fourier

$$\begin{aligned}
 \langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{w}^{(h)} \rangle &= \sum_{n=0}^{N-1} (e^{j\frac{2\pi}{N}nk})^* e^{j\frac{2\pi}{N}nh} \\
 &= \sum_{n=0}^{N-1} e^{j\frac{2\pi}{N}(h-k)n} \\
 &= \begin{cases} N & \text{pentru: } h = k \\ \frac{1 - e^{j2\pi(h-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(h-k)}} & \text{în rest} \end{cases} = 0
 \end{aligned}$$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 54

Tocmai am descoperit o frumoasă familie de vectori, scriși ca exponențiale complexe, dar pentru ca acești vectori să fie și bază a spațiului vectorial $\mathbb{C}^N$, trebuie să demonstrăm că ei sunt reciproc ortogonali. Ortogonalitatea lor impune ca produsul scalar a oricăror doi vectori ai familiei să fie zero.

Scriem produsul scalar dintre $w^{(k)}$ și $w^{(h)}$, ținând cont de definiția produsului scalar în $\mathbb{C}^N$.

Scriind în mod explicit produsul scalar și luând în considerare conjugata fiecărei componente a primului vector înmulțită cu componenta corespunzătoare a celui de-al doilea vector. Prin conjugare ne apare semnul minus la primul exponent, iar produsul exponențialelor se va scrie imediat ca o unică exponențială (prin simpla adunare algebrică a exponenților celor două exponențiale).

Apar două cazuri.

În primul rând presupunem că $h = k$. În acest caz, toate aceste elemente din sumă vor fi egale cu 1 și suma devine egală cu N .

În cazul în care $h \neq k$, avem de însumat termenii unei progresii geometrice:

$$\sum_{n=0}^{N-1} q^n = q^0 + q^1 + q^2 + \dots + q^{N-1} = \frac{1-q^N}{1-q}, \text{ de rație } q = e^{j\frac{2\pi}{N}(h-k)}.$$

Rezultatul este deci:

$$\frac{1 - e^{j2\pi(h-k)}}{1 - e^{j\frac{2\pi}{N}(h-k)}} = 0$$

deoarece $(h - k)$ este un întreg, iar $e^{j2\pi(h-k)} = 1$.

Deci, vectorii sunt ortogonali și, prin urmare, formează o bază pentru $\mathbb{C}^N$.

Concluzii

- Cei N vectori ortogonali sunt bază pentru spațiul vectorial $\mathbb{C}^N$.
- Vectorii bazei nu sunt, însă, ortonormali. Factorul de normalizare a bazei este $1/\sqrt{N}$.

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 55

Ce am stabilit până acum?

Cele mai multe fenomene naturale sau create de om prezintă un comportament periodic, respectiv după un anumit interval de timp, numit *perioadă*, aceste fenomene se repetă identic. Inversul perioadei, adică numărul de repetări pe unitatea de timp, se numește *frecvență*.

Sinusurile și cosinusurile, funcții oscilatorii simple, sunt candidați naturali, ca elemente de bază, pentru a reprezenta semnalele oscilatorii mai complicate. Acesta este și scopul analizei Fourier: să descompună un semnal în termeni de sinusuri și cosinus.

Avem, însă, două tipuri de instrumente Fourier: analiza Fourier și sinteza Fourier.

Analiza Fourier permite determinarea ponderii fiecărui bloc de bază periodic într-un semnal dat și, odată cu analiza, trecem din domeniul timpului în domeniul frecvenței. Sinteza Fourier permite construirea de semnale cu un conținut de frecvență „definit de utilizator”: odată cu aceasta trecem din domeniul frecvenței în domeniul timpului.