

CURSUL 4



ARGUMENTE ÎN FAVOAREA UTILIZĂRII SPAȚIILOR VECTORIALE.
EXEMPLE DE SPAȚII VECTORIALE. REPREZENTĂRI ÎN $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$ ȘI $L_2([-1,1])$.
ÎNMULȚIREA VECTORILOR CU SCALARI. ADUNAREA VECTORILOR.
DEFINIȚIA SPAȚIULUI VECTORIAL.
 $\mathbb{R}^N$ CA SPAȚIU VECTORIAL.
PRODUS SCALAR A DOI VECTORI.
ORTOGONALITATE. NORMĂ VS. DISTANȚĂ.
COMPLETITUDINE. SPAȚII HILBERT.
BAZĂ A UNUI SPAȚIU VECTORIAL. BAZĂ CANONICĂ. EXEMPLE.
BAZĂ ORTOGONALĂ. BAZĂ ORTONORMALĂ.
SCRIEREA UNUI VECTOR CA O COMBINAȚIE LINIARĂ DE VECTORII BAZEI.
SCHIMBAREA BAZEI. EXPRIMAREA MATRICEALĂ.
BAZĂ FOURIER ÎN $L_2([-1,1])$.
OBTINEREA UNUI SEMNAL DREPTUNGIULAR CU VECTORII BAZEI
FOURIER. FENOMENUL GIBBS.

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

1

SLIDE 1

În cursurile anterioare am analizat elementele de bază ale procesării semnalelor și am dat câteva exemple simple extrem de intuitive. Astăzi vom stabili un cadru matematic adecvat pentru restul cursurilor.

Modul în care abordăm procesarea semnalului este puțin diferit față de cel obișnuit. Ideea fundamentală este aceea că încercăm să exprimăm majoritatea conceptelor teoretice în termeni de algebră liniară și spații vectoriale. În timp ce acest lucru poate părea puțin abstract la început, va fi profitabil în cele din urmă, oferindu-ne înțelegeri foarte simple ale rezultatelor complexe. Deși cursul de azi se poate simți puțin sec și prea „matematic”, suportați-l așa cum este pentru că merită efortul!

Pentru început vom argumenta utilizarea spațiilor vectoriale în procesarea semnalelor și vă voi oferi exemple simple, intuitive, despre ceea ce spațiile vectoriale pot face pentru noi.

Voi încerca să vă ofer aceste exemple, să fac anumite analogii și să furnizăm modele cât mai simplu de înțeles, pentru a vă convinge să acceptați abordarea abstractă care o să apară pe parcurs. Abstractul se inspiră, până la urmă, tot din concret.

Această imagine, cu bombardierul Boeing B-2 Spirit, cunoscut și ca Stealth Bomber, este sugestivă atunci când vine vorba despre realitatea imediată ca sursă de inspirație.

Semnal în timp discret - reprezentare generică

$$x[n] = \dots, 1.2390, -0.7372, 0.8987, 0.1798, -1.1501, -0.2642 \dots$$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

2

SLIDE 2

De acum înainte vom deveni din ce în ce mai tehnici.

Un semnal în timp discret, reprezentat generic, poate fi exprimat precum în slide, printr-un set de numere ordonate într-o secvență, într-un șir.

CLASIFICAREA SEMNALELOR DIGITALE (DISCRETE)

- Semnale digitale de lungime finită
- Semnale digitale de lungime infinită
- Semnale digitale periodice
- Semnale digitale de suport finit

AVEM NEVOIE DE UN CADRU UNITAR DE LUCRU:
SPAȚIUL VECTORIAL

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

3

SLIDE 3

Dar am văzut deja că avem patru categorii diferite de semnale:

- de lungime finită
- de lungime infinită
- periodice și
- de suport finit.

Ar fi foarte complicat de dezvoltat întreaga teorie a procesării semnalelor dacă de fiecare dată ar trebui să ne oprim și să adaptăm ceea ce spunem la fiecare din cele patru categorii pe care le-am evidențiat.

Deci, avem nevoie de un cadru comun în care să putem vorbi despre semnale, fără să ne facem griji cu privire la categoria căreia acestea aparțin.

Acest cadru comun este oferit de spațiile vectoriale și de algebra liniară.

DE CE SE UTILIZEAZĂ SPAȚIUL VECTORIAL ÎN PRELUCRAREA SEMNALELOR?

Spațiul vectorial oferă un cadru general unitar pentru prelucrarea semnalelor

- Folosim același cadru general pentru clase diferite de semnale
- Folosim același cadru general pentru toate *semnalele în timp continuu (analogice)*
- Înțelegerea *transformării Fourier* este simplificată
- Înțelegerea *teoremei eșantionării* (și a *teoremei interpolării*) este mult ușurată
- Este util atunci când abordăm noțiuni precum *aproximare* și *compresie*

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

4

SLIDE 4

Spațiul vectorial ne este foarte convenabil, deoarece oferă același cadru pentru toate aceste categorii de semnale și, de asemenea, chiar și pentru semnalele în timp continuu.

El ne va oferi o înțelegere mai facilă a transformării Fourier și este fundamental în proiectarea sistemelor de comunicații.

Avantajele formează o listă mult prea lungă pentru a nu folosi spațiile vectoriale în procesarea semnalului.

CARACTERISTICI IMPORTANTE ALE SPAȚIULUI VECTORIAL

- Spațiul vectorial furnizează un cadru general de lucru
- Spațiul vectorial este definit prin proprietățile sale (axiome)
- Odată ce știm că acestea sunt satisfăcute, se pot folosi toate proprietățile spațiului vectorial

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

5

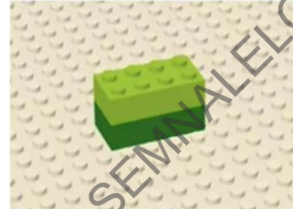
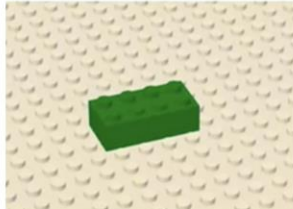
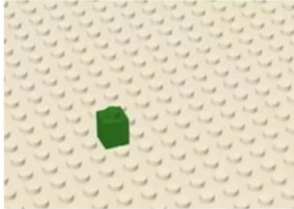
SLIDE 5

Rețineți că spațiile vectoriale reprezintă cadre foarte generale și sunt definite prin proprietățile lor și nu prin forma vectorilor pe care ele îi conțin.

Odată ce te-ai asigurat că proprietățile (axiomele) spațiului vectorial sunt îndeplinite, poți folosi toate instrumentele specifice respectivului spațiu în toate spațiile.

Și aceasta este cu adevărat puterea de generalizare a spațiului vectorial, care ne va ajuta să ne ocupăm de diferite categorii de semnale.

O ANALOGIE: JOCUL DE LEGO



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

6

SLIDE 6

Dacă vrem să înțelegem principal ce reprezintă un spațiu vectorial, putem face o analogie, modestă, e drept, cu jocul de Lego.

În Lego aveți un bloc de bază, iar ceea ce puteți face este să construiți un bloc și mai mare, să dați altă dimensiune blocului inițial. Puteți în acest mod obține oricâte blocuri, de dimensiuni identice sau diferite.

Apoi, puteți combina aceste blocuri, conform regulilor jocului.

Vom vedea toate acestea și în cazul spațiului vectorial.

Să vorbim despre *spații vectoriale*...

Unele spații vectoriale (probabil) vă sunt familiare:

$$\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$$

Alte spații vectoriale (sigur) nu vă sunt atât de cunoscute:

- Spațiul șirurilor infinite de pătrat sumabil:

$$\ell_2(\mathbb{Z})$$

- Spațiul funcțiilor de pătrat integrabil definite pe intervalul $[a, b]$:

$$L_2([a, b])$$

SLIDE 7

În loc să introducem spațiul vectorial prin enumerarea directă a axiomelor care impun comportamentul vectorilor în respectivul spațiu vectorial, vom începe cu câteva exemple cu care ar trebui să fiți familiarizați.

$\mathbb{R}^2$ și $\mathbb{R}^3$ vă sunt sigur cunoscute ca *planul euclidian* și *spațiul euclidian*. Extinderea spațiului euclidian la un număr arbitrar de dimensiuni, adică la $\mathbb{R}^N$, reprezintă un subiect al algebrei liniare.

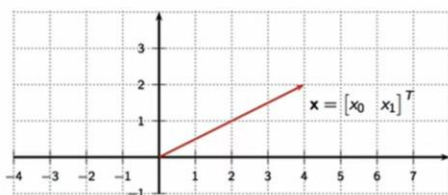
O altă extensie importantă folosește numerele complexe în loc de numere reale, și ajungem la $\mathbb{C}^N$, iar aici vectorii sunt formați din N-upluri de numere complexe. Acesta este, din nou, un subiect al algebrei liniare.

Alte spații vectoriale vă sunt sigur mai puțin cunoscute, precum $\ell_2(\mathbb{Z})$. Acesta este *spațiul vectorial al secvențelor (șirurilor) infinite de pătrat sumabil*, foarte util pentru modelarea semnalelor digitale de lungime infinită.

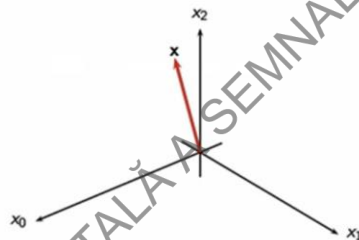
Un alt spațiu vectorial important este $L_2([a, b])$ - *spațiul vectorial al funcțiilor de pătrat integrabil, definite pe intervalul $[a, b]$* .

Unele spații vectoriale permit reprezentarea grafică

$$\mathbb{R}^2: \quad \mathbf{x} = [x_0 \ x_1]^T$$



$$\mathbb{R}^3: \quad \mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ x_2]^T$$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

8

SLIDE 8

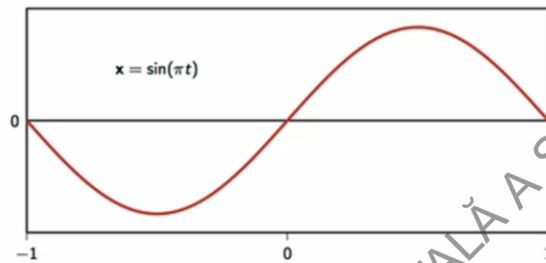
Unele spații vectoriale pot fi reprezentate grafic, așa cum este cazul lui $\mathbb{R}^2$. Dacă raportezi planul la un sistem cartezian de referință, atunci poți identifica orice punct din plan printr-o pereche de coordonate reale. Stabilim astfel o corespondență, între punctele din plan și vectorii din $\mathbb{R}^2$, care ne permite să interpretăm proprietățile vectorilor din $\mathbb{R}^2$ prin prisma proprietăților geometrice din planul euclidian.

Această analogie este extrem de utilă, mai ales atunci când este extinsă și la trei dimensiuni, deoarece ea ne va permite să folosim intuiția geometrică și mai departe, pentru a înțelege proprietățile spațiilor vectoriale oarecare, spații ce nu permit o reprezentare intuitivă sau o reprezentare grafică.

În trei dimensiuni, folosim triplete de coordonate reale pentru a localiza în mod unic orice punct din spațiu. Obținem astfel o corespondență completă între spațiul euclidian și $\mathbb{R}^3$. Folosind proprietățile geometrice ale spațiului euclidian, înțelegerea lui $\mathbb{R}^3$ este mult ușurată.

Încă un exemplu de spațiu vectorial care permite reprezentare grafică

$$L_2([-1, 1]) : \quad \mathbf{x} = x(t), \quad t \in [-1, 1]$$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

9

SLIDE 9

Să ne oprim puțin și asupra spațiului vectorial $L_2([-1, 1])$, adică spațiul funcțiilor $x = x(t)$, de pătrat integrabil, definite pe intervalul $[-1, 1]$.

Orice „vector” al acestui spațiu vectorial este de fapt o funcție, a cărei variabilă t se mișcă între -1 și 1 .

Un exemplu în acest sens este funcția $x = \sin(\pi t)$, iar „vectorul” acesta poate fi desenat realizându-se reprezentarea grafică a funcției pe acest interval.

Alte spații vectoriale, însă, nu permit astfel de reprezentări...

- ▶ $\mathbb{R}^N$ for $N > 3$
- ▶ $\mathbb{C}^N$ for $N > 1$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

10

SLIDE 10

Alte spații vectoriale nu permit astfel de reprezentări, cum sunt de exemplu $\mathbb{R}^N$, pentru $N > 3$, respectiv $\mathbb{C}^N$, pentru $N > 1$. Nu mai avem nicio posibilitate de a înțelege lucrurile, așa cum am făcut-o în cazurile clasice prezentate.

SPAȚII VECTORIALE: noțiuni importante

INGREDIENTE:

- Mulțimea vectorilor V
- Mulțimea scalarilor (de obicei $\mathbb{C}$)

ESTE NECESAR SĂ AVEM POSIBILITATEA:

- Să redimensionăm vectorii, prin multiplicare cu un scalar
- Să combinăm vectorii, prin însumare

SLIDE 11

Așadar, din aceste exemple, putem vedea că spațiile vectoriale pot să fie un grup foarte divers, iar ceea ce vectorii din aceste spații au în comun este că ei se supun unui set comun de axiome care definesc proprietățile vectorilor și stabilesc ce putem face cu acești vectori.

Ingredientele necesare definirii unui spațiu vectorial sunt:

- un set de vectori V , și nu spunem nimic despre ce sunt de fapt acești vectori.
- un set de scalari, care în exemplele noastre vor fi întotdeauna din mulțimea numerelor reale sau, mai general, a numerelor complexe.

Pentru a fi capabili să operăm cu vectorii, este necesar să-i putem înmulți cu scalari, asta pentru a le schimba dimensiunea, și respectiv să-i însumăm, asta pentru a-i putea combina unii cu alții.

Proprietățile (axiomele) spațiului vectorial

Pentru $x, y, z \in V$ și $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$, arbitrar considerate, avem:

- ▶ $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$
- ▶ $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z})$
- ▶ $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$
- ▶ $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$
- ▶ $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$
- ▶ $\exists \mathbf{0} \in V \mid \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}$
- ▶ $\forall \mathbf{x} \in V \exists (-\mathbf{x}) \mid \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

12

SLIDE 12

Modul în care facem acest lucru este prin impunerea unor proprietăți (axiome) pentru suma vectorilor și înmulțirea vectorilor cu scalari.

Comutativitatea adunării vectoriale

Asociativitatea adunării vectoriale

Înmulțirea scalarilor cu vectori să fie distributivă în raport cu adunarea vectorilor

Înmulțirea vectorilor cu scalari să fie distributivă în raport cu adunarea scalarilor

Înmulțirea cu scalari a vectorilor este asociativă

Existența vectorului nul, $\mathbf{0}$, în spațiul vectorial

Existența elementului opus ($-\mathbf{x}$) pentru fiecare vector $\mathbf{x}$ din V

Dacă vom verifica axiomele enumerate în toate spațiile vectoriale date anterior ca exemple vom vedea că acestea sunt respectate.

$\mathbb{R}^N$ ca spațiu vectorial

$$\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{N-1}]^T$$

$$\mathbf{y} = [y_0 \ y_1 \ \dots \ y_{N-1}]^T$$

$$\alpha \mathbf{x} = [\alpha x_0 \ \alpha x_1 \ \dots \ \alpha x_{N-1}]^T$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [x_0 + y_0 \ x_1 + y_1 \ \dots \ x_{N-1} + y_{N-1}]^T$$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

13

SLIDE 13

Haideți să luăm $\mathbb{R}^N$ mulțimea N-uplurilor de numere reale și să definim operațiile de bază: înmulțirea lor cu scalari și respectiv adunarea acestora.

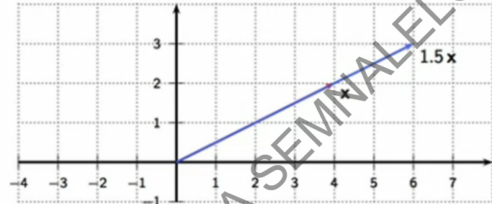
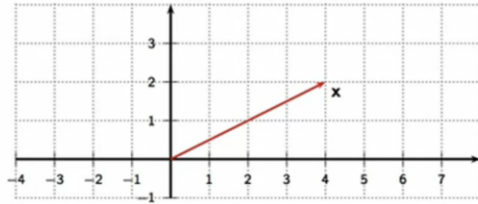
Dacă verificăm îndeplinirea axiomelor spațiului vectorial vom vedea că aceasta se confirmă.

Putem, așa cum am spus, să folosim intuiția geometrică pentru dimensiuni N mai mici pentru a înțelege ce presupun aceste operații.

Înmulțirea (multiplicarea) vectorilor cu scalari în $\mathbb{R}^2$

Priviți cum arată în $\mathbb{R}^2$ rezultatul înmulțirii vectorului $x = [x_0 \ x_1]^T$ cu scalarul α , adică: $\alpha x = [\alpha x_0 \ \alpha x_1]^T$.

$$\alpha x = [\alpha x_0 \ \alpha x_1]^T$$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

14

SLIDE 14

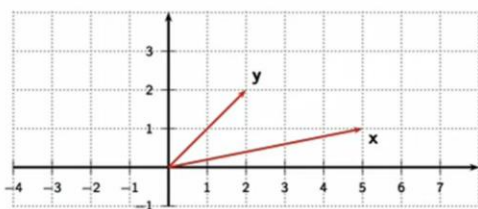
Priviți cum arată în $\mathbb{R}^2$ rezultatul înmulțirii vectorului $x = [x_0 \ x_1]^T$ cu scalarul α , adică: $\alpha x = [\alpha x_0 \ \alpha x_1]^T$.

Se obține un vector de aceeași direcție cu cel inițial, având lungimea (modulul) de α ori mai mare.

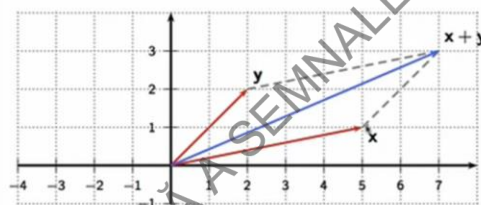
Adunarea (însurarea) vectorilor în $\mathbb{R}^2$

Priviți cum arată în $\mathbb{R}^2$ rezultatul adunării vectorului $x = [x_0 \ x_1]^T$ cu vectorul $y = [y_0 \ y_1]^T$, adică:
 $x + y = [x_0 + y_0 \ x_1 + y_1]^T$.

$$x + y = [x_0 + y_0 \ x_1 + y_1]^T$$



$$x + y = [x_0 + y_0 \ x_1 + y_1]^T$$



Marin Bancoș - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

15

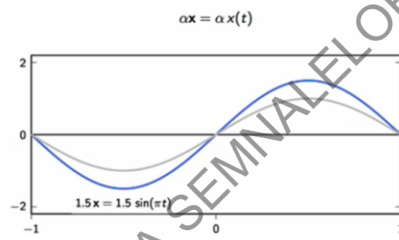
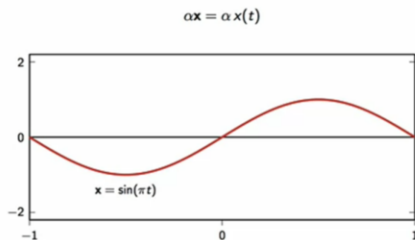
SLIDE 15

Priviți cum arată în $\mathbb{R}^2$ rezultatul adunării vectorului $x = [x_0 \ x_1]^T$ cu vectorul $y = [y_0 \ y_1]^T$, adică: $x + y = [x_0 + y_0 \ x_1 + y_1]^T$.

Grafic, luăm primul vector și îl reprezentăm, apoi luăm al doilea vector și îl plasăm cu originea în extremitatea primului vector fără a-i schimba direcția, iar vectorul sumă va fi cel care pleacă din originea primului până în extremitatea celui de-al doilea.

Aceasta este celebra regulă a paralelogramului.

Înmulțirea (multiplicarea) vectorilor cu scalari în $L_2[-1,1]$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

16

SLIDE 16

În $L_2([-1,1])$, înmulțirea unui vector cu un scalar reprezintă, de fapt, înmulțirea funcției considerate cu scalarul respectiv.

Considerăm, spre exemplu, „vectorul” $x = \sin(\pi t)$ și scalarul $\alpha = 1,5$. Atunci rezultatul este „vectorul”:

$$\alpha x = 1,5 \sin(\pi t)$$

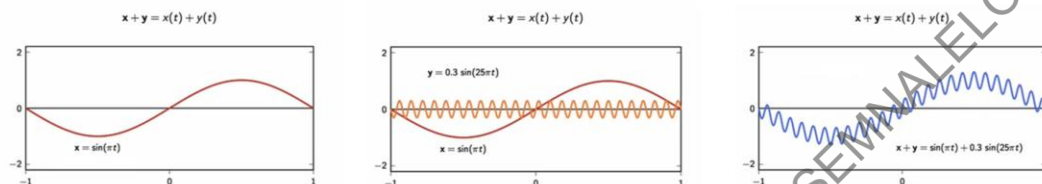
Prin urmare, amplitudinea crește de 1,5 ori.

Adunarea (însurarea) vectorilor în $L_2[-1,1]$

Considerăm „vectorul” $x = \sin(\pi t)$ și „vectorul” $x = 0,3 \sin(25\pi t)$.

Rezultatul adunării lor este „vectorul”:

$$x + y = \sin(\pi t) + 0,3 \sin(25\pi t)$$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

17

SLIDE 17

În $L_2([-1,1])$, adunarea a doi vectori se reduce la însurarea a două funcții.

Considerăm, spre exemplu, „vectorul” $x = \sin(\pi t)$ și „vectorul” $x = 0,3 \sin(25\pi t)$.

Rezultatul adunării lor este „vectorul”:

$$x + y = \sin(\pi t) + 0,3 \sin(25\pi t)$$

care are forma din figură.

Trebuie să remarcăm cât de diferit arată exemplele de vectori din cele două spații vectoriale considerate, $\mathbb{R}^2$ – primul și $L_2([-1,1])$ – al doilea, și implicit rezultatele obținute la înmulțirea cu scalari, respectiv la adunare.

Mai avem nevoie de ceva?

ACESTE SUNT NOȚIUNILE NOU INTRODUSE

- Mulțimea vectorilor V
- Mulțimea scalarilor (de obicei $\mathbb{C}$)
- Înmulțirea (multiplicarea) cu scalar
- Adunarea (însușirea) vectorilor

PENTRU A PUTEA MĂSURA ȘI COMPARA VECTORII, INTRODUCEM PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

18

SLIDE 18

Să trecem în revistă ce avem până în prezent. Noțiunile nou introduse sunt enumerate în slide. Avem nevoie, însă, și de o nouă operație care să ne permită să măsurăm și să comparăm vectorii.

PRODUSUL SCALAR A DOI VECTORI

- Permite *stabilirea similarității* a doi vectori
- Dacă produsul scalar al celor doi vectori este zero, atunci vectorii sunt *ortogonali*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$$

SLIDE 19

Această necesitate va fi asigurată prin definirea *produsului scalar a doi vectori*. El este esențial ca ingredient al spațiului vectorial, pentru a putea construi noțiunea de distanță între elementele acestuia. Se numește „scalar” deoarece rezultatul produsului este un scalar, un număr. Valoarea obținută poate fi interpretată ca o măsură a similitudinii, a asemănării dintre cei doi vectori. Dacă produsul scalar este zero (caz foarte important, pe care îl vom examina în detaliu), spunem că vectorii sunt maxim diferiți sau, altfel spus, sunt *ortogonali*.

Proprietățile (axiomele) produsului scalar

Pentru $x, y, z \in V$ și $\alpha \in \mathbb{C}$, arbitrar considerate, avem:

- ▶ $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$
- ▶ $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle^*$
- ▶ $\langle \alpha x, y \rangle = \alpha^* \langle x, y \rangle$
 $\langle x, \alpha y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$
- ▶ $\langle x, x \rangle \geq 0$
- ▶ $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Dacă produsul scalar a doi vectori nenuli, $x, y \neq 0$, este egal cu 0, adică $\langle x, y \rangle = 0$, atunci cei doi vectori se numesc *ortogonali*.

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

20

SLIDE 20

Produsul scalar este și el definit axiomatic, iar condițiile pe care va trebui să le îndeplinească sunt cele din slide, cu observația că s-a folosit notația „asterisc” pentru conjugata numărului complex respectiv. Nu mai este necesară conjugata atunci când se obțin valori reale.

Avem:

Distributivitatea produsului scalar în raport cu adunarea vectorilor.

Comutativitatea produsului scalar, sub rezerva aplicării conjugatei atunci când produsul este un număr complex.

Regulile de ieșire a numărului complex α din interiorul produsului scalar înafara acestuia.

Produsul scalar al unui vector cu el însuși este un număr real pozitiv.

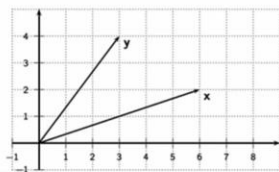
Produsul scalar al unui vector cu el însuși este zero, dacă și numai dacă vectorul este vectorul nul.

Este important de reținut ce înseamnă *ortogonalitatea* a doi vectori.

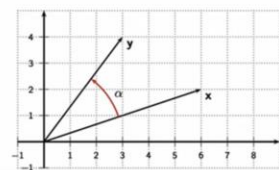
Vom analiza câteva exemple de produse scalare pentru a ne stimula puțin intuiția.

Produsul scalar în $\mathbb{R}^2$

$$(x, y) = x_0 y_0 + x_1 y_1$$

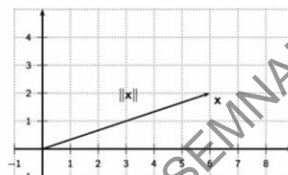


$$(x, y) = x_0 y_0 + x_1 y_1 = \|x\| \|y\| \cos \alpha$$



NORMA VECTORULUI x

$$(x, x) = x_0^2 + x_1^2 = \|x\|^2$$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

21

SLIDE 21

În $\mathbb{R}^2$ produsul scalar a doi vectori este dat de produsul primelor componente din fiecare pereche, la care se adună produsul componentelor secunde din fiecare pereche.

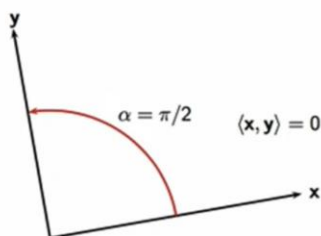
Această definiție nu permite o justificare imediată, așa că haideți să particularizăm puțin.

În primul rând, dacă ne uităm la produsul scalar al unui vector cu el însuși, putem vedea că el este egal cu: $x_0^2 + x_1^2$, adică suma pătratelor componentelor sale. Dacă ne uităm la reprezentarea grafică a vectorului, putem vedea, folosind teorema lui Pitagora, că rezultatul acesta este chiar pătratul lungimii vectorului. De fapt avem chiar un nume dedicat pentru această lungime: *norma vectorului*. Deci norma unui vector este rădăcina pătrată a produsului scalar al vectorului cu el însuși, și reprezintă lungimea vectorului.

Așadar produsul scalar al unui vector cu el însuși este o foarte bună măsură a lungimii vectorului și înțelegem acum de ce se extinde această definiție de la $\mathbb{R}^2$ la toate spațiile vectoriale.

Ortogonalitate în $\mathbb{R}^2$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = x_0 y_0 + x_1 y_1 = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \alpha$$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

22

Slide 22

Să revenim acum la definiția generală a produsului scalar.

Am putea folosi puțină trigonometrie pentru a demonstra echivalența celor două exprimări. Vă las vouă această bucurie!

Deci, produsul scalar dintre doi vectori este egal cu norma primului vector înmulțită cu norma celui de-al doilea vector ori cosinusul unghiului format de cei doi vectori.

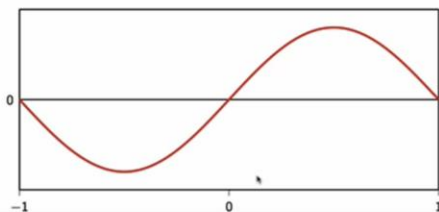
Acum, dacă cei doi vectori au norme egale, produsul lor scalar va fi o bună măsură a similarității celor doi vectori, deoarece ia valori între pătratul normei comune vectorilor, atunci când ei coincid, și zero, atunci când unghiul dintre ei este de 90 de grade (ei fiind ortogonali).

Deci *ortogonalitatea exprimă diferența maximă de similaritate dintre doi vectori din plan („vectorii sunt total diferiți unul de altul”).*

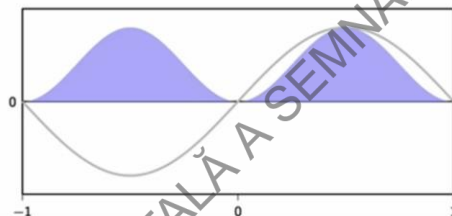
Produsul scalar în $L_2([-1,1])$. Normă. Un exemplu: $x(t) = \sin(\pi t)$

$$\langle x, y \rangle = \int_{-1}^1 x(t)y(t) dt$$

$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \int_{-1}^1 \sin^2(\pi t) dt = 1$$



$$\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = \int_{-1}^1 \sin^2(\pi t) dt = 1$$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 23

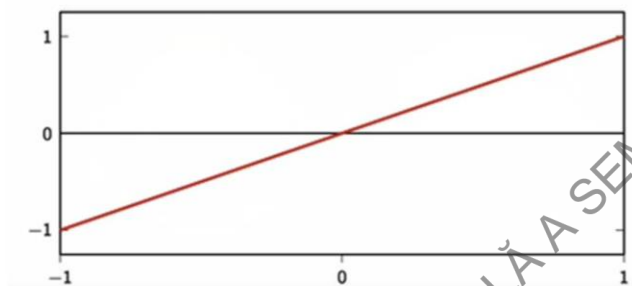
Luând acum un alt exemplu, să aruncăm o privire asupra produsului scalar din $L_2([-1,1])$. Acesta este de obicei definit ca integrala produsului dintre două funcții x și y (care corespund celor doi vectori).

Vă asigur că este foarte ușor să verificați că acest produs scalar, astfel definit, respectă axiomele.

Să folosim acum acest produs scalar pentru a calcula norma vectorului $x = \sin(\pi t)$. Calculul integralei ne va conduce la valoarea 1, ce corespunde zonei marcate în reprezentarea grafică. Amintiți-vă interpretarea geometrică a integralei definite!

Alt exemplu: $y(t)=t$

$$\|y\|^2 = \int_{-1}^1 t^2 dt = 2/3$$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

24

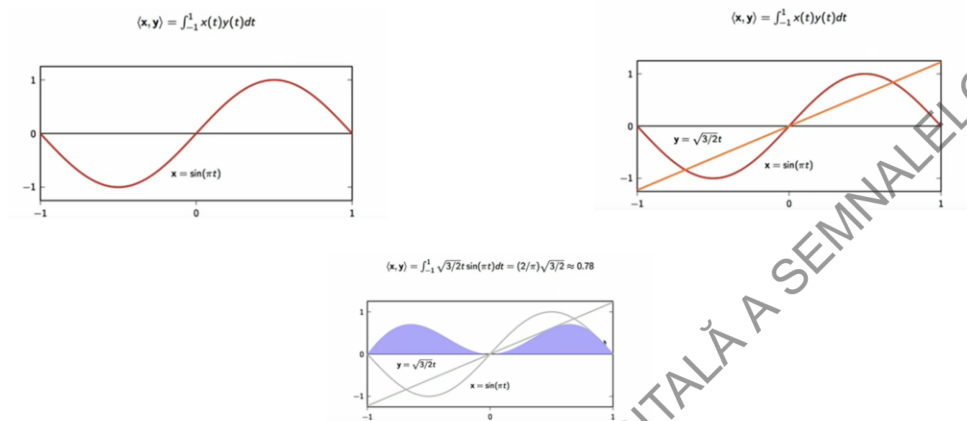
SLIDE 24

Considerăm acum un alt element din $L_2([-1,1])$, respectiv pe $y(t) = t$ (rampă liniară). Dacă vom calcula norma acestuia obținem valoarea $2/3$ și deci norma sa nu mai are valoarea 1, precum în cazul anterior.

Pentru a avea tot valoarea 1 trebuie să-l modificăm pe $y(t)$, împărțindu-l pe t cu $\sqrt{2/3}$.

Motivul pentru care facem asta este că de-abia acum, când ne-am asigurat că vectorii au aceeași normă, putem folosi produsul scalar pentru a compara funcțiile/vectorii x și y din $L_2([-1,1])$.

„Comparăm” semnalele $x(t)$ și $y(t)$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

25

SLIDE 25

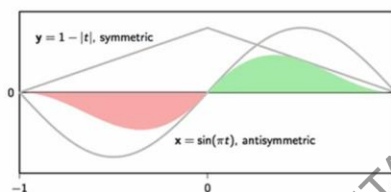
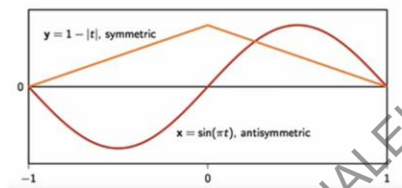
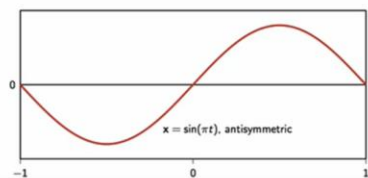
Deci, în prima figură avem reprezentată prima funcție, $x(t) = \sin(\pi t)$, iar în cea de-a doua figură avem cea de-a doua funcție, $y(t) = \frac{t}{\sqrt{2/3}} = \sqrt{\frac{3}{2}}t$.

Calculăm produsul scalar dintre cele două, iar acesta este de aproximativ 0,78. El corespunde ariei marcate în figură.

Să ne amintim că pentru vectori de aceeași normă, 1 în cazul nostru, produsul scalar poate varia între această valoare, 1, în cazul asemănării maxime a vectorilor, și 0, în cazul ortogonalității, corespunzătoare faptului că vectorii sunt total diferiți.

Aici avem o valoare de 0,78 care indică faptul că rampa liniară și funcția sinus aleasă sunt, de fapt, destul de asemănătoare.

O altă „comparație” între două semnale



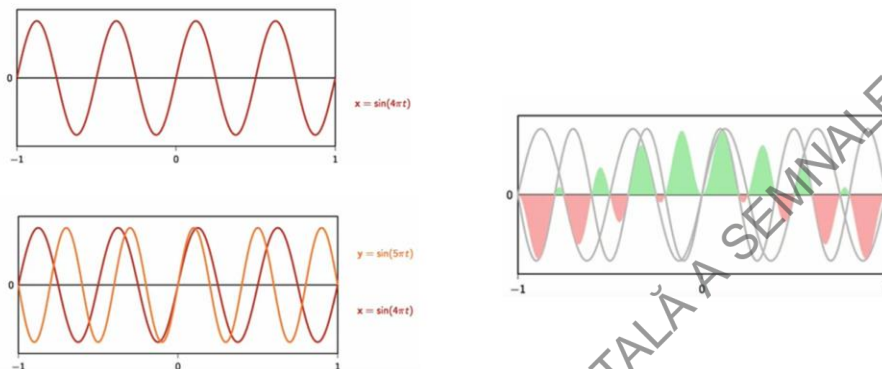
Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

26

SLIDE 26

Produsul scalar în cazul funcțiilor x și y figurate aici ne conduce, de această dată, la valoarea 0 (suma ariilor colorate, de semne opuse, ne dă 0). Aceste funcții sunt ortogonale, deci maxim diferite, lucru de așteptat atâta timp cât una este simetrică (pară), iar cealaltă este antisimetrică (impară).

Un ultim exemplu de „comparație” între două semnale



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

27

SLIDE 27

Un alt caz celebru de ortogonalitate a funcțiilor este dat de sinusoidale ale căror frecvențe sunt legate armonic.

Deci, suntem încă în $L_2([-1, 1])$. Alegem, ca primă funcție, $x(t) = \sin(4\pi t)$, iar ca a doua funcție, $y(t) = \sin(5\pi t)$. Cele două frecvențe sunt multipli ai frecvenței fundamentale π .

Dacă calculăm produsul scalar al funcțiilor, chiar și grafic, putem vedea că trebuie să calculăm ariile acestor zone, colorate în roșu și verde, și să le însumăm. Pentru fiecare zonă colorată în roșu avem câte o zonă corespunzătoare de aceeași arie, de culoare verde, care are semnul opus. Și astfel, pe măsură ce le însumăm, ajungem la un produs scalar total egal cu zero.

NORMĂ vs DISTANȚĂ

- Produsul scalar permite definirea normei unui vector:

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

- Cu ajutorul normei se definește distanța dintre doi vectori:

$$d(x, y) = \|x - y\|$$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

28

SLIDE 28

În general, dacă avem un spațiu vectorial dotat cu un produs scalar, avem și o normă definită natural în acest spațiu, pentru orice vector x , dată de rădăcina pătrată a produsului scalar al lui x cu el însuși.

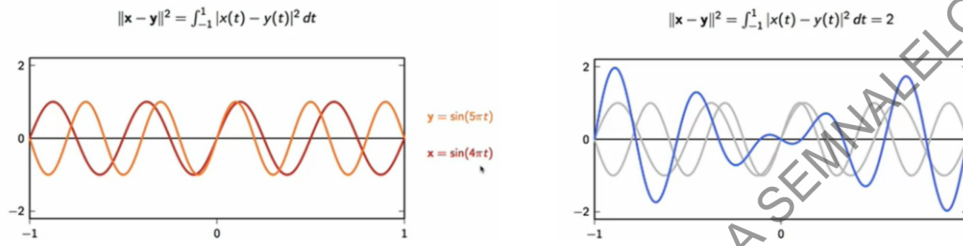
Putem folosi această normă pentru a defini și o distanță, $d(x, y)$, între doi vectori x și y , dată de norma diferenței dintre cei doi vectori.

Din nou, în $\mathbb{R}^2$ acest lucru este foarte ușor de vizualizat, după cum se observă și în figură. Aici diferența dintre cei doi vectori este vectorul care conectează extremitățile, iar norma acestui vector de legătură este o *măsură cantitativă a distanței dintre vectorii inițiali*.

Rețineți că distanța nu este același lucru cu ortogonalitatea! Între vectorii ortogonali putem avea o distanță foarte mare. Distanța dintre ei cu siguranță nu este zero.

Produsul scalar este, așa cum am văzut, o *măsură calitativă a similarității, a asemănării dintre vectori*, iar ortogonalitatea acestora sugerează că vectorii sunt total diferiți ori, altfel spus, au forme complet diferite.

Distanța dintre două semnale



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 29

În spațiile vectoriale de funcții, norma diferenței dintre doi vectori este exprimată de obicei prin *eroarea pătratică medie*.

Ne plasăm în $L_2([-1, 1])$ și alegem, din nou, $x(t) = \sin(4\pi t)$ și $y(t) = \sin(5\pi t)$. Vom avea norma și reprezentările grafice din slide. Diferența funcțiilor are, însă, reprezentarea grafică ciudată din figură, figurată cu culoarea albastră. Dacă calculăm aria acestei diferențe la pătrat obținem o valoare egală cu 2, care reprezintă distanța dintre cele două funcții sinusoidale legate armonic.

Semnale discrete (digitale) de lungime finită

Semnalele de lungime finită și cele periodice „conviețuiesc” în $\mathbb{C}^N$

- Notăția utilizată pentru vectori:

$$x = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{N-1}]^T$$

- Toate operațiile utilizate sunt bine definite și intuitive
- Spațiul semnalelor N-periodice este notat câteodată prin $\tilde{\mathbb{C}}^N$

SLIDE 30

Deci, cum ne vor ajuta pe noi spațiile vectoriale în studiul semnalelor în timp discret? Ei bine, până acum ar trebui să fi fost bine înțeles faptul că semnalele de lungime finită conviețuiesc în $\mathbb{C}^N$.

Vom nota orice semnal de lungime finită N printr-un vector $x = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{N-1}]^T$, unde operatorul de transpunere indică faptul că acesta este, de fapt, un vector coloană.

Toate operațiile cu acest tip de vectori sunt bine definite și intuitive.

Avem adunarea și înmulțirea cu scalari definite în $\mathbb{C}^N$.

Spațiul semnalelor N-periodice este, de asemenea, egal cu $\mathbb{C}^N$, deoarece, așa cum am văzut deja, cantitatea de informație a semnalului periodic, de perioadă N, este echivalentă cu cantitatea de informație conținută de semnalul de lungime finită N.

Uneori pentru a sublinia în mod explicit periodicitatea semnalului, vom indica spațiul vectorial folosind notația cu „tilda”: $\tilde{\mathbb{C}}^N$.

Produsul scalar în cazul semnalelor discrete (digitale) din $\mathbb{C}^N$

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{n=0}^{N-1} x^*[n]y[n]$$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

31

SLIDE 31

În $\mathbb{C}^N$ produsul scalar este definit prin formula dată în slide.

El este corect definit, și se poate face verificarea îndeplinirii axiomelor, pentru toți vectorii de lungime finită N , deci pentru toți vectorii din $\mathbb{C}^N$. Prin urmare el este corect definit și pentru toate semnalele de lungime finită N , respectiv pentru cele periodice de perioadă N .

Cum tratăm cazul semnalelor discrete (digitale) de lungime infinită?

$$\langle x, y \rangle = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x^*[n]y[n]$$

ATENȚIE: o astfel de sumă ar putea „exploda” (să avem rezultatul infinit). Este necesar să ne asigurăm că acest lucru nu se întâmplă.

Impunem următoarea **condiție**:

- **Semnalele să fie șiruri de pătrat-sumabil, adică:** $\sum |x[n]|^2 < \infty$
- Să ne amintim că am introdus deja notația pentru spațiul șirurilor infinite de pătrat sumabil: $\ell_2(\mathbb{Z})$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

32

SLIDE 32

Ce facem, însă, în cazul semnalelor de lungime infinită?

Am putea extinde conceptul de $\mathbb{C}^N$ la $\mathbb{C}^\infty$, dar ne-am confrunta cu o mare problemă: produsul scalar, definit anterior pe cazul N , s-ar extinde acum la o sumă infinită, care ar furniza un rezultat infinit.

Pentru a ne asigura că acest lucru nu se întâmplă și că produsul scalar este bine definit, vom considera un spațiu vectorial al secvențelor (șirurilor) de lungime infinită, dar de pătrat sumabil (condiția din slide).

Dacă vă amintiți definiția energiei unui semnal, noua condiție impusă acum este echivalentă cu cerința ca toate secvențele (șirurile) din acest nou spațiu vectorial să fie de energie finită.

Acesta este spațiul vectorial al secvențelor (șirurilor) de pătrat-sumabil $\ell_2(\mathbb{Z})$.

În continuare vom folosi aceeași notație vectorială pe care am folosit-o și pentru semnalele de lungime finită. Vom avea acum vectori cu coloană infinită.

Din păcate, există multe semnale de interes care nu aparțin lui $\ell_2(\mathbb{Z})$, iar astfel de situații vor trebui depășite.

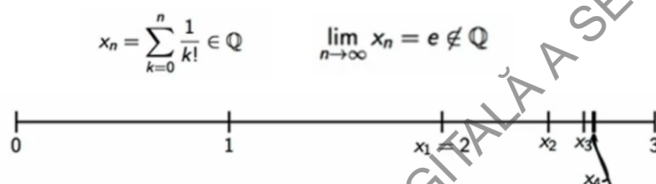
O chestiune de tehnică... matematică

Operațiile introduse, înmulțirea (multiplicarea) cu scalari și adunarea (însurarea), nu au voie să ne „arunce” în afara spațiului în care acestea se folosesc.

Cu alte cuvinte, orice combinație liniară de vectori din spațiu trebuie să conducă la un vector care aparține spațiului.

Dacă se îndeplinește această condiție, atunci este asigurată *completitudinea* spațiului, acesta numindu-se *spațiu complet*.

Exemplu de *spațiu incomplet*:



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

33

SLIDE 33

Și, în sfârșit, un ultim aspect tehnic. Am definit spațiile vectoriale în așa fel încât operațiile standard, înmulțirile cu scalari și adunările, să nu ne arunce înafara spațiului vectorial.

Cu alte cuvinte, orice combinație liniară de vectori din spațiul vectorial considerat trebuie să aparțină spațiului vectorial.

Acum, dacă avem o succesiune infinită de vectori din spațiul vectorial, care converge către o limită, dorim ca această limită să aparțină și ea spațiului vectorial. Un spațiu vectorial cu această proprietate se numește *spațiu complet*. Aceasta este, însă, o cerință pur tehnică, care nu este niciodată folosită în mod explicit în procesarea practică a semnalelor, dar va fi utilă pentru a demonstra unele rezultate fundamentale, precum *teorema eșantionării*, la care ne-am referit încă din primul curs.

Este greu să se vină cu un exemplu simplu de spațiu vectorial incomplet, dar pentru a vă face o idee despre ce implică completitudinea, puteți lua în considerare, de exemplu, mulțimea tuturor numerelor raționale $\mathbb{Q}$.

Putem construi șiruri convergente de numere raționale, care nu converg, însă, către un număr rațional. Seria din slide converge către numărul irațional e , în ciuda faptului că fiecare termen al seriei este un număr rațional.

SPAȚII HILBERT

Orice spațiu vectorial $H(V, \mathbb{C})$, pe care s-a definit un produs scalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C}$, și care este și spațiu complet, se numește *spațiu Hilbert*.

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

34

SLIDE 34

Când pe un spațiu vectorial s-a definit un produs scalar și spațiul și este un spațiu complet, spunem că spațiul vectorial considerat este *spațiu Hilbert*.

Bază a unui spațiu vectorial

- **Combinatia liniară** reunește operațiile de bază introduse pe spațiul vectorial $\mathbf{V}$: înmulțirea cu scalari și adunarea vectorilor

$$\mathbf{g} = \alpha \mathbf{x} + \beta \mathbf{y}$$

- **Problema care se pune:**

Poate fi găsit un număr minim de vectori în $\mathbf{V}$, să spunem

$$\{\mathbf{w}^{(k)}\},$$

astfel încât orice vector din $\mathbf{V}$ să poată fi scris ca o combinație liniară de vectori ai acestei mulțimi

$$\{\mathbf{w}^{(k)}\} \quad ?$$

O astfel de mulțime de vectori din $\mathbf{V}$ se numește **bază** a spațiului vectorial.

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

35

SLIDE 35

O *bază* a unui spațiu vectorial este „scheletul” aceluia spațiu vectorial, ca să spunem așa. Baza este cea care ne furnizează structura spațiului vectorial și permite descompunerea oricărui vector din acel spațiu într-o combinație liniară a vectorilor din compunerea bazei.

Bazele spațiilor vectoriale sunt extrem de importante în procesarea semnalelor. Vom vedea în cursurile următoare că transformata Fourier este pur și simplu o schimbare de bază.

Întrebarea care ne-o punem este dacă putem găsi un set minim de vectori într-un spațiu vectorial astfel încât să putem exprima orice vector din acest spațiu ca o combinație liniară de vectori ai acestui set. Un astfel de set îl numim *bază*.

Vă puteți gândi la analogia cu blocurile Lego pe care am descris-o mai înainte. Întrebarea ar fi: putem găsi un set minim de blocuri de construcție cu care să putem construi orice altă piesă din set?

O scurtă observație cu privire la notația introdusă prin care dorim să indicăm o familie de vectori $\{\mathbf{w}^{(k)}\}$. Acel superscript din paranteză indică numărul cardinal (de ordine) al vectorului din familie!

Baza canonică a lui $\mathbb{R}^2$

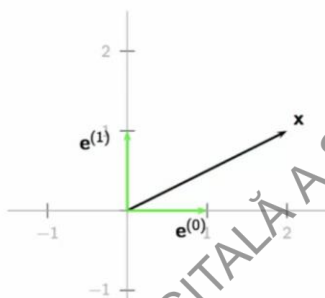
Baza se numește *canonică* deoarece coordonatele lui $x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$, adică x_0 și x_1 , coincid cu coeficienții cu care se înmulțesc $e^{(0)}$ și $e^{(1)}$ în scrierea lui x cu ajutorul elementelor bazei: $x = x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$e^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad e^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = 2e^{(0)} + e^{(1)}$$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

36

SLIDE 36

Vom începe cu un exemplu foarte simplu, evidențiind *baza canonică* pentru planul euclidian.

Oricărui punct x din plan îi asociem un vector cu originea în originea planului și cu extremitatea în punctul considerat. Folosim notația $x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$, unde x_0 și x_1 sunt valorile coordonatelor punctului, raportat la sistemul de axe.

Este ușor de văzut că dacă folosim vectorii $e^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ și $e^{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, atunci vectorul x se scrie imediat ca o combinație liniară de cei doi:

$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = x_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_1 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x_0 e^{(0)} + x_1 e^{(1)}$$

Cum x a fost ales arbitrar, mulțimea $\{e^{(0)}, e^{(1)}\}$ este, prin urmare, *bază pentru* $\mathbb{R}^2$.

Mai mult, deoarece coeficienții/scalarii ce apar în combinația liniară coincid chiar cu elementele lui x , spunem că baza este una *canonică*.

Am luat și cazul particular din figură, iar lucrurile sunt acum mai ușor de înțeles.

Un alt exemplu de bază a lui $\mathbb{R}^2$

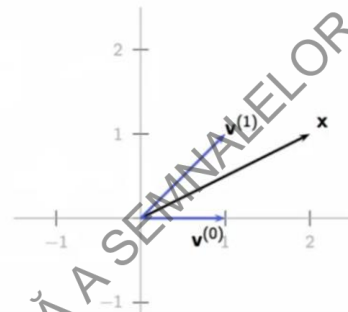
$$\mathbf{v}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{v}^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} = \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\alpha_0 = x_0 - x_1, \quad \alpha_1 = x_1$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{v}^{(0)} + \mathbf{v}^{(1)}$$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

37

SLIDE 37

Cu toate acestea, există și alte baze pe care le-am putea alege pentru planul euclidian. De exemplu, baza considerată în slide.

Orice vector $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix}$ poate fi exprimat ca o combinație liniară a elementelor mulțimii $\{\mathbf{v}^{(0)}, \mathbf{v}^{(1)}\}$, care au componentele date în figură. Formulele de calcul pentru coeficienții combinației liniare $\mathbf{x} = \alpha_0 \mathbf{v}^{(0)} + \alpha_1 \mathbf{v}^{(1)}$ rezultă imediat dintr-un sistem simplu de două ecuații cu două necunoscute.

De această dată coeficienții α_0 și α_1 nu mai coincid cu componentele lui $\mathbf{x}$, și prin urmare baza nu mai este una canonică. Dar, totuși, ea este o bază.

Există, de fapt, un număr infinit de baze pentru $\mathbb{R}^2$.

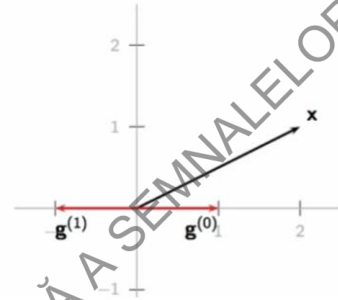
Exemplu de pereche de vectori din $\mathbb{R}^2$ care nu este bază

$$\mathbf{g}^{(0)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{g}^{(1)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{x} \neq \alpha_1 \mathbf{g}^{(0)} + \alpha_2 \mathbf{g}^{(1)}$$

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \end{bmatrix} \neq \alpha_0 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \alpha_1 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$



PROBLEMA: Vectorii aleși nu sunt liniar independenți

Marin Bancoș - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

38

SLIDE 38

Însă nu toate perechile de vectori din plan reprezintă o bază pentru planul euclidian. Iată că, pentru exemplul din slide, nu este posibil să se exprime orice punct din plan ca o combinație liniară de $\mathbf{g}^{(0)}$ și $\mathbf{g}^{(1)}$. Aceasta deoarece orice combinație liniară a acestor doi vectori duce la un rezultat ce are a doua componentă 0. Prin urmare, cu ajutorul lor nu putem exprima niciun vector pentru care a doua componentă este nenulă.

Grafic, este ușor de văzut, deoarece puteți observa că $\mathbf{g}^{(0)}$ și $\mathbf{g}^{(1)}$ sunt de fapt coliniari, adică sunt în prelungire în plan. Ei pot „captura” doar o componentă dimensională a planului și orice combinație liniară a lor va duce la un simplu punct de pe această dreaptă, fără a se putea ajunge la celelalte puncte din plan.

Exprimăm acest lucru spunând că *vectorii sunt liniar dependenți*.

EXISTĂ BAZE CANONICE ÎN CAZUL SPAȚIILOR DE DIMENSIUNE INFINITĂ?

$$\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \mathbf{w}^{(k)}$$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

39

SLIDE 39

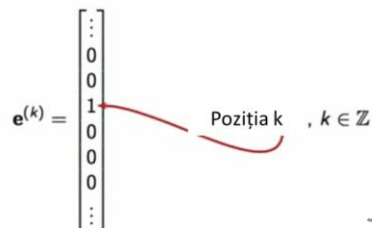
Ne punem acum întrebarea firească cu privire la existența bazelor canonice pentru spațiile vectoriale de dimensiune infinită.

Răspunsul este DA!

EXEMPLU: Baza canonică pentru $\ell_2(\mathbb{Z})$

$$\mathbf{e}^{(k)} = \begin{bmatrix} \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

Poziția k , $k \in \mathbb{Z}$



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

40

SLIDE 40

Cu anumite precauții, răspunsul este DA. Spre exemplu, pentru $\ell_2(\mathbb{Z})$ baza canonică are o infinitate de elemente și este formată din vectorii $\mathbf{e}^{(k)}$, ce au exprimarea din slide.

DAR ÎN CAZUL SPAȚIILOR VECTORIALE DE FUNCȚII?

$$f(t) = \sum_k \alpha_k h^{(k)}(t)$$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

41

SLIDE 41

Și mai interesant este faptul că putem dezvolta baze pentru spațiile vectoriale de funcții. Luați, de exemplu, următoarea bază de funcții de pătrat integrabil pe un interval.

O bază celebră pentru spațiul vectorial $L_2([-1,1])$ al funcțiilor de pătrat integrabil definite pe intervalul $[-1,1]$

Baza Fourier

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos \pi t, \sin \pi t, \cos 2\pi t, \sin 2\pi t, \cos 3\pi t, \sin 3\pi t, \dots$$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

42

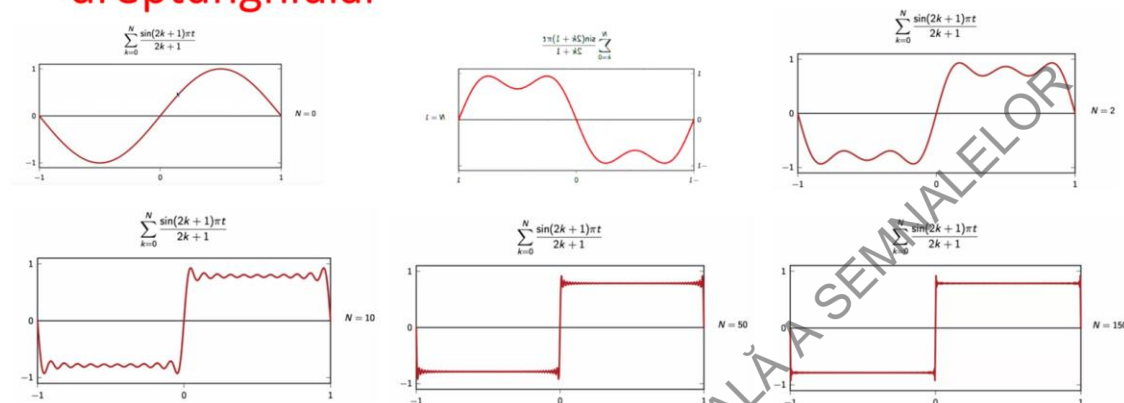
SLIDE 42

Subliniez, există un număr infinit de baze pentru orice spațiu vectorial.

În cazul lui $L_2([-1,1])$ una dintre cele mai faimoase baze este *baza Fourier*. Putem ordona vectorii acesteia ca în slide.

Putem, oare, reprezenta orice funcție de pătrat integrabil peste $[-1,1]$ ca o combinație liniară a acestor funcții de bază? Răspunsul este **da**, din moment ce matematicienii au demonstrat că este vorba despre o bază a acestui spațiu vectorial. Iar acest lucru va duce la rezultate deosebite.

Utilizarea bazei Fourier în cazul semnalului dreptunghiular



Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

43

SLIDE 43

De exemplu, putem aproxima o funcție discontinuă, cum este acest semnal dreptunghiular, cu o combinație liniară de funcții continue, de sinusoides. Pentru fiecare număr N de termeni vom obține o nouă aproximare. Acum, desigur, puteți vedea că pe măsură ce numărul N al termenilor crește, aproximarea este din ce în ce mai bună.

Însă ceva neplăcut se întâmplă în punctele de tranziție. Această creștere pe care o vedeți în jurul punctului de tranziție este cunoscută sub numele de *fenomenul Gibbs*.

DEFINIȚIA BAZEI UNUI SPAȚIU VECTORIAL

Se dau:

- Un spațiu vectorial H
- O mulțime de K vectori din H :

$$W = \{w^{(k)}\}_{k=0,1,\dots,K-1}$$

Atunci W este o bază pentru H dacă:

- Oricare $x \in H$ poate fi scris sub forma:
$$x = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k w^{(k)}, \quad \alpha_k \in \mathbb{C}$$
- Coeficienții α_k sunt unici

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

44

SLIDE 44

După acest exemplu, haideți să formalizăm conceptul de *bază a unui spațiu vectorial* H .

Luăm o mulțime de K vectori din H și denumim mulțimea W .

W va fi o bază dacă se întâmplă două două lucruri:

- În primul rând, trebuie să putem să exprimăm orice vector x din spațiul vectorial ca o combinație liniară formată cu vectorii lui W .
- În al doilea rând, coeficienții care apar în această combinație liniară trebuie să fie unic determinați pentru fiecare vector x considerat.

UNICITATEA REPREZENTĂRII UNUI VECTOR OARECARE CA O COMBINAȚIE LINIARĂ DE VECTORII BAZEI

$$\sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \mathbf{w}^{(k)} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_k = 0, \quad k = 0, 1, \dots, K-1$$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

45

SLIDE 45

Unicitatea reprezentării este echivalentă cu independența liniară a vectorilor din baza W .

Cu alte cuvinte, dacă luăm o combinație liniară a vectorilor din bază care ne dă ca rezultat vectorul nul, atunci această egalitate va avea loc dacă și numai dacă toți coeficienții sunt nuli.

BAZĂ ORTOGONALĂ. BAZĂ ORTONORMALĂ.

- Într-o **bază ortogonală**, pentru orice k și n distincte, avem:

$$\langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{w}^{(n)} \rangle = 0$$

- Într-o **bază ortonormală**, pentru oricare ar fi k și n , avem:

$$\langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{w}^{(n)} \rangle = \delta[n - k]$$

SLIDE 46

Dintre toate bazele posibile ale unui spațiu vectorial, cele mai importante sunt *bazele ortogonale*. Într-o bază ortogonală, vectorii bazei sunt reciproc ortogonali, condiție care se exprimă prin prima relație din slide.

Dacă avem un noroc deosebit, acești vectori vor fi, de asemenea, și de normă unitară, iar baza devine astfel o *bază ortonormală*. Proprietatea cheie a unei baze ortonormale se exprimă într-o formă compactă prin relația din slide. Produsul scalar dintre oricare doi vectori ai bazei ortonormale este egal cu delta diferenței dintre indici. Deci, cu alte cuvinte, dacă vectorii nu sunt unul și același, atunci produsul scalar va fi egal cu zero. Dacă, însă, avem produsul scalar al unui vector din bază cu el însuși, atunci produsul este egal cu unu.

Dacă baza nu este ortonormală, vestea bună este că avem un algoritm numit *procedura de ortonormalizare Gram-Schmidt*. Iar voi deja știți acest lucru. Asta ne va permite să schimbăm orice bază a unui spațiu vectorial într-o bază ortonormală, dacă avem nevoie.

Determinarea coeficienților α_K când baza este ortonormală

$$\mathbf{x} = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \mathbf{w}^{(k)}$$

$$\alpha_k = \langle \mathbf{w}^{(k)}, \mathbf{x} \rangle$$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

47

SLIDE 47

Dacă avem o bază oarecare, întrebarea este cum determinăm pentru un vector $\mathbf{x}$ oarecare, al spațiului vectorial, coeficienții α_k din reprezentarea sa ca o combinație liniară de elementele $\mathbf{w}^{(k)}$ ale bazei.

Dacă baza este ortonormală, atunci procedura este una extrem de simplă. Luăm produsul scalar dintre vectorul $\mathbf{w}^{(k)}$ al bazei și vectorul original $\mathbf{x}$ și vom obține direct coeficientul α_k .

Puteți verifica acest lucru foarte ușor, înlocuindu-l pe $\mathbf{x}$, având prima expresie, și luând în considerare ortonormalitatea bazelor.

SCHIMBAREA BAZELOR

Dacă $\{\mathbf{v}^{(k)}\}$ este o bază ortonormală, atunci:

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \mathbf{w}^{(k)} = \sum_{k=0}^{K-1} \beta_k \mathbf{v}^{(k)} \\ \beta_h &= \langle \mathbf{v}^{(h)}, \mathbf{x} \rangle \\ &= \langle \mathbf{v}^{(h)}, \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \mathbf{w}^{(k)} \rangle \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \langle \mathbf{v}^{(h)}, \mathbf{w}^{(k)} \rangle\end{aligned}$$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 48

O altă problemă frecventă, cu care ne vom confrunta, este schimbarea reprezentării unui vector, ca o combinație liniară, dintr-o bază în alta.

Luăm un vector $\mathbf{x}$ și considerăm reprezentarea sa ca o combinație liniară de vectori ai bazei $\{\mathbf{w}^{(k)}\}$.

Întrebarea care se pune este:

Cum găsim coeficienții reprezentării aceluiși vector în raport cu o altă bază, $\{\mathbf{v}^{(k)}\}$?

Presupunem că a doua bază este una ortonormală. Urmărim raționamentul pe slide.

Coeficientul oarecare β_h din noua reprezentare se obține, așa cum am văzut în slide-ul anterior, ca produs scalar între vectorul $\mathbf{v}^{(h)}$ al noii baze și vectorul original $\mathbf{x}$.

Înlocuindu-l pe $\mathbf{x}$ cu prima sa reprezentare și folosind proprietățile produsului scalar se obține imediat rezultatul din figură.

EXPRIMAREA MATRICEALĂ

Dacă notăm cu:

$$c_{hk} = \langle \mathbf{v}^{(h)}, \mathbf{w}^{(k)} \rangle, \quad \text{obținem:}$$

$$\beta_h = \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k \langle \mathbf{v}^{(h)}, \mathbf{w}^{(k)} \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^{K-1} \alpha_k c_{hk}$$

$$\begin{bmatrix} \beta_0 \\ \vdots \\ \beta_{K-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{00} & c_{01} & \cdots & c_{0(K-1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{(K-1)0} & c_{(K-1)1} & \cdots & c_{(K-1)(K-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{K-1} \end{bmatrix}$$

Marin Bancos - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

49

SLIDE 49

Noul coeficient este, de fapt, o combinație liniară a coeficienților anteriori. Ceea ce este remarcabil este faptul că factorii utilizați în această combinație liniară nu depind de vectorii pe care îi manipulăm. Aici apar doar produse scalare între vectori din baza originală și noua bază.

De fapt, putem rescrie totul ca produsul a două matrici. Noua exprimare ne ajută să realizăm simplu schimbarea de bază, plecând de la o bază oarecare și trecând la o bază ortonormală.

Vom vedea, foarte curând, că asta este cu adevărat ceea ce se află în spatele algoritmului de transformare Fourier discretă pentru semnalele de tip finit.

VĂ MULȚUMESC, AM TERMINAT. APLAUZE, VĂ ROG!



ȘI CHIAȚ NU ESTE CAZUL SĂ MAI PUNEȚI ȘI ÎNTREBĂRI... CĂ NU MAI AVEM TIMP.

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR