

CURSUL 3

PROBLEMA MOMENTULUI INIȚIAL. REZOLVARE.
BUCLĂ. RECURSIVITATE. EXEMPLE.
REDAREA AUDIO A UNOR SEMNALE.
ALGORITMUL KARPLUS-STRONG.

EXPONENȚIALA COMPLEXĂ. AVANTAJELE UTILIZĂRII SALE.
REPREZENTĂRI ÎN PLANUL COMPLEX.
CONDIȚIA DE PERIODICITATE A SEMNALELOR ÎN TIMP DISCRET.
PERCEPȚIE ȘI ALIASING.

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

1

SLIDE 1

Vom continua, acum, cu aprofundarea a ceea ce înseamnă introducerea acelei bucle inverse, despre care am discutat, și vom aborda lucrurile concret prin exemple.

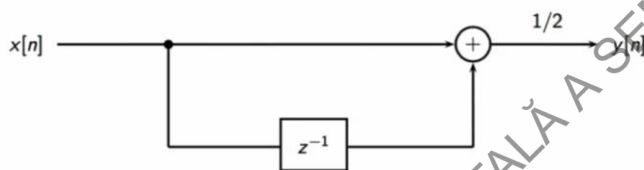
Vom vedea că am făcut pași importanți și că putem, deja, compune „muzică”.

Vom discuta și despre un semnal digital fundamental, exponențiala complexă în timp discret, și particularitățile pe care aceasta le prezintă.

Bloc de mediere (aritmetică) a două eșantioane consecutive: media mobilă

$$m = \frac{a + b}{2}$$

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

2

SLIDE 2

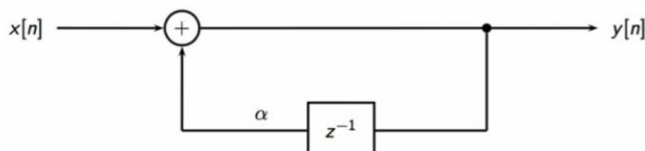
Vă aduceți aminte, din cursul precedent, că o medie mobilă este o medie locală pe care o efectuăm la fiecare pas într-o secvență, astfel: se ia eșantionul curent împreună cu eșantionul anterior, se însumează cele două și se împart la 2.

Așadar:

$$y[n] = x[n] + x[n-1]/2.$$

Reprezentarea cu blocuri a mediei mobile, este cea din figură.

Ce se întâmplă dacă inversăm sensul buclei?



$$y[n] = x[n] + \alpha y[n-1]$$

MARIN BANCOS - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

3

SLIDE 3

O întrebare legitimă este următoarea: ce se întâmplă dacă în blocul de mediere mobilă analizat inversăm sensul buclei?

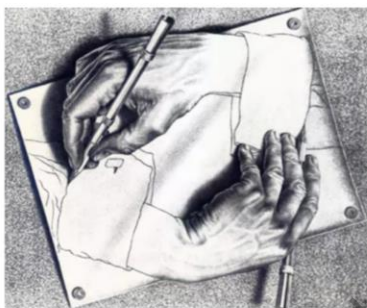
Să luăm cazul cel mai general, când realizăm scalarea cu un alfa oarecare. Se obține circuitul din figură.

Ecuția care descrie transformarea operată de circuit este următoarea. Avem că $y[n] = x[n] + \alpha y[n-1]$, adică ieșirea la momentul n , este egală cu intrarea la momentul n plus alfa, unde alfa este pur și simplu un factor de scalare oarecare în acest caz, de înmulțit cu ieșirea la momentul precedent ($n-1$).

Deci, reutilizăm rezultatul de la ieșire $y[n-1]$, anterior, în loc să folosim un eșantion de intrare $x[n-1]$, anterior.

Ori de câte ori folosim eșantioane anterioare de pe ieșire în formula considerată, spunem că *algoritmul este recursiv*.

Conceptul de recurență



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

4

SLIDE 4

Și poate că această imagine a lui Escher surprinde, într-adevăr, esența recursivității și problema ei fundamentală. Dacă avem nevoie de eșantioane anterioare de pe ieșire, atunci de unde începem?

M. C. Escher (1898-1972) a fost un cunoscut artist plastic, gravor și grafician olandez, iar lucrarea reprodusă aici se numește *Mâini care desenează*, fiind realizată în anul 1948.

Rezolvarea problemei momentului inițial: Cine a fost prima dată, oul sau găina?

- Se stabilește care este momentul de start (inițial): acesta, în mod uzual, este stabilit $n_0 = 0$
- Ne asumăm faptul că intrarea și ieșirea sunt pe zero, pentru toate momentele de dinainte de $n_0 = 0$ (adică sunt resetate!)

MARIN BANCOS - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

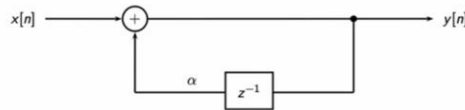
5

SLIDE 5

Aceasta este la fel ca *problema întâietății oului sau găinii*.

În procesarea semnalelor *problema o rezolvăm prin stabilirea condițiilor inițiale nule*. Cu alte cuvinte, setăm un moment de început pentru calculul algoritmului nostru și presupunem că toate intrările și ieșirile sunt 0 pentru absolut toate valorile lui n înainte de momentul de începere. Așadar în acel moment de start, de obicei $n_0=0$, considerăm că toate bufferele, toate celulele de memorie din circuitele noastre, sunt pe zero. Astfel putem da startul.

Un exemplu din... domeniul bancar



$$y[n] = x[n] + \alpha y[n-1]$$

Evidențiem o ecuație simplă ce descrie modul de calcul al dobânzii bancare pentru un depozit bancar:

- Presupunem că dobânda este de 5% (0,05) pe an
- Considerăm că dobânda acumulată se calculează la finalul anului, pe 31 decembrie
- Notăm cu $x[n]$ depozitele/retragerile din anul n
- Valoarea depozitului va fi: $y[n] = x[n] + 1,05y[n-1]$

MARIN BANCOS - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

6

SLIDE 6

Hai să exemplificăm recursivitatea explicând cum se acumulează dobânda în contul vostru bancar.

Să presupunem că dobânda este constantă ca procent și este, să zicem, 5%. Procent destul de generos, de altfel...

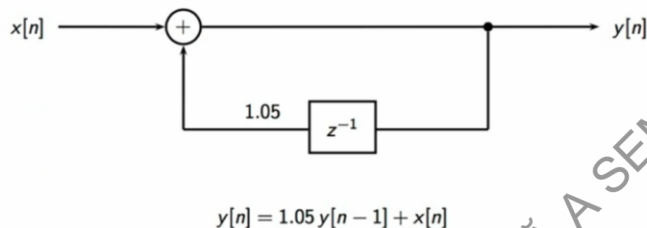
Considerăm că se virează în cont doar o dată pe an, la sfârșitul anului, pe 31 decembrie.

Depunerile și retragerile din timpul anului sunt modelate printr-o secvență de intrare $x[n]$.

Avem că $x[n]$ va fi pozitiv, dacă ați depus bani în contul bancar, și negativ, dacă ați retras bani.

Valoarea depozitului, $y[n]$, va fi dată de soldul $x[n]$ al depunerilor și retragerilor de peste an, la care se adaugă capitalul bancar $y[n-1]$ avut în anul anterior înmulțit cu 1,05.

Acumularea dobânzii: este descrisă printr-o recurență de ordin 1



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

7

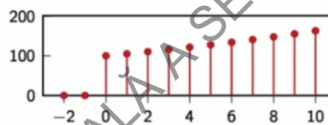
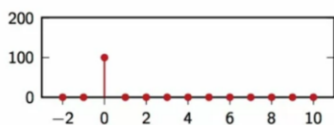
SLIDE 7

Priviți cum arată circuitul care corespunde algoritmului de economisire bancară descris. El înglobează operațiunile pe care le efectuăm în contul nostru bancar pe parcursul anului, iar rezultatul furnizat este suma totală pe care o vom avea la sfârșitul anului în contul bancar.

După o singură depunere în anul de început...

$$x[n] = 100 \delta[n]$$

- ▶ $y[0] = 100$
- ▶ $y[1] = 105$
- ▶ $y[2] = 110.25$, $y[3] = 115.7625$ etc.
- ▶ In general: $y[n] = (1.05)^n 100 u[n]$



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

8

SLIDE 8

Un exemplu simplu corespunde unei depuneri unice care se face chiar la început.

Să presupunem că anul este zero și am depus 100 de unități de numerar în contul bancar. Atunci capitalul corespunzător anului zero, $y[0]$, este 100.

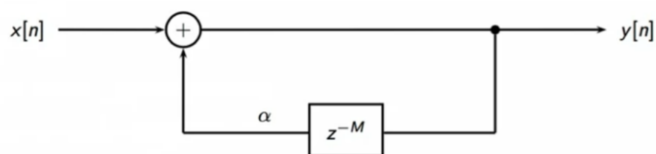
Deoarece nu ne atingem de capital, la sfârșitul primului an vom avea $y[1] = 105$ unități.

În al doilea an vom fi acumulat încă 5% din capital. Deci 5% dintr-un 105. Așadar $y[2]$ va fi 110,25.

În anul al treilea acumulăm $y[3]$, care va fi suma anterioară ori 1,05. Și așa mai departe...

Observăm că în timp creșterea este una exponențială, numai că baza exponențialei este una foarte mică și, prin urmare, nu ne vom îmbogăți foarte repede.

O generalizare interesantă



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

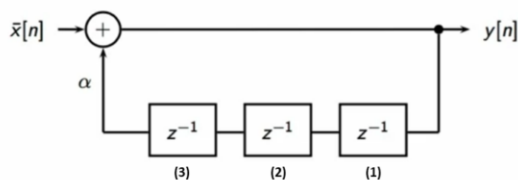
9

SLIDE 9

Haideți acum să înlocuim întârzierea din buclă, care a fost o întârziere cu 1 eșantion, cu o întârziere cu M eșantioane. Rezultatul va fi acum α ori ieșirea întârziată cu M pași (eșantioane), plus intrarea.

Cum o obținem? Ea rezultă prin înlocuirea blocului de întârziere cu un eșantion, cu o cascadă din M astfel de blocuri de întârziere.

Crearea buclelor și funcționarea structurii



$$y[n] = \alpha y[n-3] + \bar{x}[n]$$

n	intrarea $\bar{x}[n]$	ieșirea $y[n]$	blocul (3)	blocul (2)	locul (1)
0	1	$1+0=1$	0	0	1
1	0	$0+0=0$	0	1	0
2	0	$0+0=0$	1	0	0
3	0	$0+1=1$	0	0	1
4	0	$0+0=0$	0	1	0
5	0	$0+0=0$	1	0	0
...					

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

10

SLIDE 10

Analizăm cazul particular $M=3$, iar pentru aceasta cascădăm trei blocuri de întârziere cu o unitate (adică trei celule elementare de memorie). Vom considera condiții inițiale nule pentru intrarea $x[n]$, ieșirea $y[n]$ și conținutul celulelor de memorie.

Să vedem cum funcționează circuitul folosind la intrare o secvență discretă delta și considerând $\alpha = 1$.

Pentru fiecare n în parte, vom scrie valorile pentru intrarea $x[n]$, ieșirea $y[n]$ și blocurile de întârziere (celulele de memorie) (3), (2) și (1).

S-a creat astfel o buclă care furnizează un 1 pe ieșire la o perioadă de trei eșantioane.

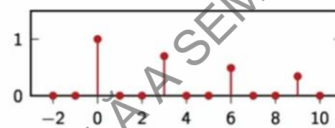
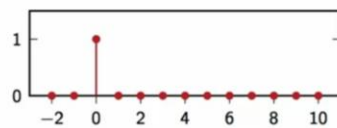
Exemplu

$$M = 3, \alpha = 0.7, x[n] = \delta[n]$$

$$\triangleright y[0] = 1, y[1] = 0, y[2] = 0$$

$$\triangleright y[3] = 0.7, y[4] = 0, y[5] = 0$$

$$\triangleright y[6] = 0.7^2, y[7] = 0, y[8] = 0, \text{ etc.}$$



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

11

SLIDE 11

Putem experimenta cu generatorul de bucle modificând unii dintre parametrii structurii.

De exemplu, să alegem $\alpha = 0,7$. Să lăsăm întârzierea de 3, iar secvența de intrare să fie tot secvența delta.

Prima dată când parcurgem bucla, vom obține aceeași ieșire ca în exemplul anterior.

Deci, $y[0] = 1, y[1] = 0$ și $y[2] = 0$.

Pentru $n = 3$, valoarea 1 care a tranzitat linia de întârziere va apărea la intrarea în sumator, fiind înmulțită în prealabil cu 0,7.

Deci obținem $y[3] = 0,7$, iar apoi obținem din nou două zerouri: $y[4] = 0$ și $y[5] = 0$.

După aceasta, când parcurgem bucla încă o dată, 0,7 a trecut prin linia de întârziere și va fi înmulțit din nou cu 0,7. Obținem 0,7 la puterea doua.

...

Rezultatul obținut va fi o secvență pseudo-periodică, în sensul că avem același model de trei eșantioane, dar de fiecare dată după ce parcurgem bucla amplitudinea eșantionului diferit de zero din model este de 0,7 la puterea $n/3$.

Putem compune „muzică”!

- Construim o buclă de recurență cu o întârziere M
- Alegem un semnal digital $\bar{x}[n]$ care este non-zero numai pentru: $0 \leq n \leq M-1$
- Fixăm un factor α de descreștere (cădere)
- Furnizăm pe intrare $\bar{x}[n]$
- Culegem pe ieșire rezultatul

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

12

Un alt mod de a experimenta structura prezentată este să păstrăm $\alpha = 1$ (adică să nu avem atenuare), și să utilizăm un semnal de intrare având suport finit, de „lungime” M eșantioane, egală exact cu „lungimea” lanțului de M celule de memorie (a celui buffer).

Vă încurajez să faceți verificarea cu instrument de scris și hârtie, și veți vedea că dacă potriviți lungimea semnalului de intrare cu lungimea bufferului, ceea ce obțineți este o secvență cu adevărat periodică, în care apare modelul inițial repetat de o infinitate de ori începând cu momentul 0.

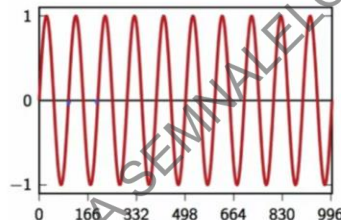
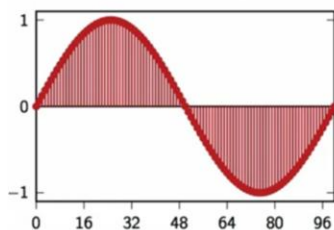
Interesant este că putem folosi această structură simplă pentru a construi un *sintetizator muzical elementar* care, în ciuda simplității sale, poate produce destule simulări interesante ale sunetelor instrumentelor muzicale reale.

SLIDE 12

- Vom construi o buclă recursivă cu o întârziere M .
- Vom alege un semnal de intrare care este de suport finit, fiind diferit de zero doar între 0 și $(M - 1)$. Deci, lungimea suportului semnalului de intrare va coincide cu lungimea liniei de întârziere.
- Vom alege α , fie $\alpha = 1$, când sunetul nu este atenuat, fie $\alpha < 1$, când apare atenuare.
- Vom introduce această secvență de suport finit în sistem și redăm rezultatul folosind strategia pe care am văzut-o anterior.

Redarea unui semnal sinusoidal discret (digital)

$M = 100$, $\alpha = 1$, $\bar{x}[n] = \sin(2\pi n/100)$ între 0 și 99, și zero în rest



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

13

SLIDE 13

Vom începe cu un exemplu foarte simplu. Vom alege $M = 100$ (întârzierea) și $\alpha = 1$ (corespunzător sunetului neatenuat).

Vom considera semnalul de intrare ca fiind ceea ce corespunde unei perioade complete a unei sinusoidă. În acest sens, luăm o sinusoidă cu o frecvență $\omega = 2\pi/100$. Aceasta înseamnă că o perioadă se va completa în exact 100 de eșantioane.

Vom introduce secvența în sistem și vom obține următoarea formă de undă, unde vedem că perioadele sunt unite perfect la fiecare 100 de eșantioane.

Dacă redăm această formă de undă folosind o frecvență de eșantionare de $F_s = 48$ kHz, vom avea 48.000 de eșantioane pe secundă, iar modelul se repetă la fiecare 100 de eșantioane. Și astfel rezultatul pe care îl vom percepe va avea 480 Hz.

CUM SE AUDE?

480 Hz
Sine Wave Audio
Frequency



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

14

SLIDE 14

[REDARE SUNET SINUSOIDĂ]

Bine, acesta nu este un sunet prea interesant și de aceea vom încerca să introducem puțin realism.

Să introducem câteva note de realism

M controlează frecvența (pitch-ul, înălțimea sunetului)

α controlează anvelopa („căderea” - decay)

$\bar{x}[n]$ controlează timbrul („culoarea” sunetului)

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

15

SLIDE 15

M - adică întârzierea fixată - controlează frecvența/înălțimea sunetului perceput.

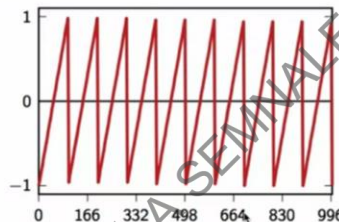
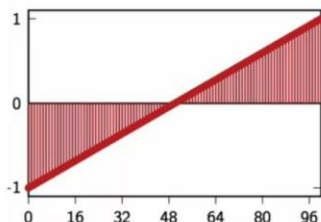
α - controlează anvelopa (căderea / decay-ul, indiferent dacă avem sau nu atenuare).

$x(n)$ - adică eșantioanele inițiale ale semnalului de suport finit, controlează timbrul / culoarea sunetului.

Modificând acești parametri putem obține efecte interesante.

Vioara și dinții de fierăstrău...

$M = 100$, $\alpha = 0.95$, $\bar{x}[n]$: semnal „dinte de fierăstrău” între 0 și 99, și zero în rest



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

16

SLIDE 16

Haideti să încercăm să schimbăm timbrul/culoarea sunetului, adică pe $x(n)$ și în loc să folosim o undă sinusoidală, folosim ceea ce numim undă în „dinți de ferăstrău”. Denumirea este chiar sugestivă și nu are nevoie de explicații suplimentare.

La ce ar corespunde un astfel de semnal? Să ne imaginăm că tragem cu arcușul peste o coardă a unei viori. Coarda se deplasează și se tensionează. Când tensiunea devine prea mare, coarda sare înapoi în poziția inițială. Modelarea deplasării corzii și întoarcerii sale bruște la poziția inițială o facem chiar printr-un astfel de semnal, având o pantă/o rampă de creștere liniară de la -1 la +1.

Construim această rampă, care merge de la -1 la +1, din 100 de eșantioane.

Vom alege un factor $\alpha = 0,95$. Vom furniza noul semnal pe intrare și vom obține un semnal periodic care arată ca în figură.

Deoarece factorul α este foarte aproape de 1, nu veți putea vedea căderea anvelopei din această mică fereastră de eșantioane. Dar dacă ar fi să trasăm semnalul la o scară mult mai largă, căderea ar fi perfect vizibilă.

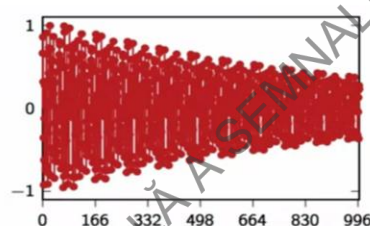
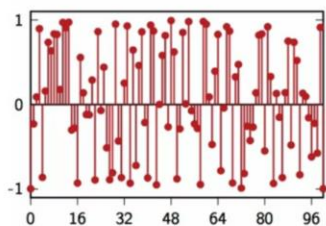
Deci, acum, dacă redăm sunetul, obținem un timbru/o culoare a sunetului, cum îi mai spunem, complet diferită.

[REDARE SUNET DINTI DE FIERASTRAU]

Bine, acesta nu a fost chiar cel mai bun sunet de vioară auzit de voi vreodată, dar acest algoritm chiar funcționează remarcabil de bine pentru a simula sunetul corzilor ciupite.

Algoritmul Karplus-Strong

$M = 100$, $\alpha = 0.9$, $\bar{x}[n]$: este definit prin 100 de valori, oarecare, între 0 și 99, și zero în rest



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

17

SLIDE 17

Acesta este de fapt contextul în care a fost inventat algoritmul de către Karplus și Strong. Ei au aflat că cel mai bun mod de a inițializa algoritmul, deci cea mai bună modalitate de a „alege” semnalul de intrare de suport finit, este utilizarea unor eșantioane complet aleatorii.

La aceasta se adaugă alegerea unui factor α suficient de rapid.

Vom alege $\alpha = 0,9$ și vom folosi 100 de valori aleatorii, între -1 și +1, pentru semnalul de suport finit de la intrare. După ce vom rula algoritmul, vom obține o secvență de ieșire care va arăta cam ca în figură. Aici deja putem observa că factorul α determină căderea mai rapidă a anvelopei.

Sunetul este acesta:

[REDARE SUNET KARPLUS-STRONG]

Alexander Strong a inventat algoritmul, iar Kevin Karplus a realizat prima analiză a modului în care acesta funcționează. Împreună au dezvoltat implementări software și hardware ale algoritmului, incluzând și un circuit integrat VLSI. Au numit algoritmul DIGITAR, de la „digital guitar”.

AUTO - TUNE

AUTO-TUNE este un procesor audio introdus în 1996 de compania americană Antares Audio Technologies. Cum se obțineau noile efecte audio înainte de a apărea acesta?



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

18

SLIDE 18 – AUTO-TUNE

„Decât” o glumă...

EXPONENȚIALA COMPLEXĂ

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

19

SLIDE 19

Am văzut, în tot ceea ce am parcurs până acum, câteva exemple relevante de semnale în timp discret. Ne vom opri, în cele ce urmează, asupra unui tip de semnal care joacă un rol fundamental în înțelegerea prelucrării digitale a semnalelor, de la analiza Fourier și până la filtrarea datelor. Este vorba despre **exponențiala complexă**. Exponențiala complexă descrie, într-o formă compactă, un comportament oscilatoriu cu o frecvență dată și o fază inițială fixată. Notăția cu numere complexe este și convenabilă, și foarte practică. Ea este considerată un fel de standard în procesarea semnalului digital. Vom întâmpina, însă, și o dificultate importantă, aflându-ne în timp discret. Aceasta deoarece conceptul de frecvență devine aici mai complicat, din cauza unui fenomen numit „aliasing”.

O atenționare de început

$$e^{jx} = \cos x + j \sin x, \text{ unde: } j^2 = -1$$

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

SLIDE 20

Când vorbim despre exponențiala complexă avem în minte *formula lui Euler*, dată sub această formă, din slide.

De aici pot fi deduse și expresiile pentru funcțiile sinus și cosinus, scrise cu ajutorul exponențialei complexe. Vă invit să vă aduceți aminte și să le obțineți!

Oscilațiile sunt prezente peste tot



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

21

SLIDE 21

Am văzut că oscilațiile sunt peste tot în jurul nostru, începând de la bătăile inimii, trecând apoi la motoare, ori la valurile mărilor și oceanelor, ori chiar la instrumentele muzicale.

Oscilațiile sunt prezente peste tot

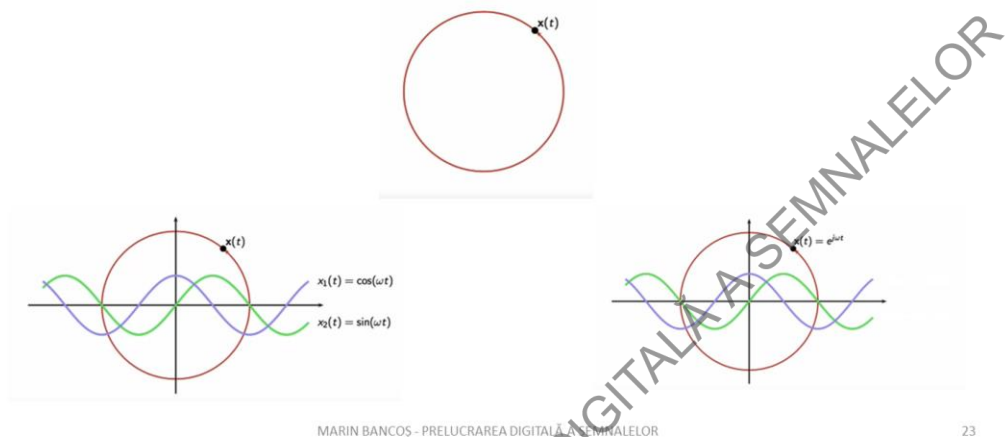
- Sistemele dinamice durabile se manifestă printr-un comportament oscilatoriu (funcționează ciclic)
- Intuitiv, lucrurile care nu se manifestă în acest fel, adică cele care nu funcționează ciclic, nu sunt nici durabile: bombe, rachetele, oamenii, etc.

SLIDE 22

Adevărul este că sistemele dinamice durabile în mod obligatoriu trebuie să prezinte un comportament oscilatoriu. Într-un fel sau altul, este necesar să avem ceva care revine la starea inițială, pentru că lucrurile care nu se comportă astfel nu pot dăinui mult în timp.

Deci, de exemplu, o bombă are multă energie, dar eliberarea de energie este unidirecțională și, prin urmare, nu este sustenabilă la nesfârșit. Rachetele, le putem privi în același mod... Din păcate, chiar și ființele umane sunt bune exemple în acest sens, cu toate că multe părți din interiorul corpului nostru funcționează după modelul circular/oscilatoriu.

Funcțiile sin și cos înglobate în exponențiala complexă



MARIN BANCOS - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

23

SLIDE 23

O oscilație poate fi interpretată ca fiind rezultatul unei rotații.

Luăm un punct în plan, îl facem să se învârtă în cerc și creem astfel un comportament oscilant.

Dacă punem un sistem de axe de coordonate în centrul cercului, putem descrie deplasarea verticală și orizontală a punctului, pe măsură ce acesta se învârtă pe cerc, cu ajutorul funcțiilor cosinus și sinus. Așadar, avem întotdeauna aceste două funcții trigonometrice, care lucrează împreună, pentru a descrie poziția a ceva ce se învârtă în cerc.

Poate că este mai ușor, însă, să folosim un sistem de referință complex, centrat pe originea oscilației. Folosim exponențiala complexă pentru a descrie poziția punctului $x(t)$ în plan.

Vom spune că poziția punctului este descrisă de exponențiala complexă $e^{j\omega t}$, unde ω este frecvența de rotație. Aici ne aflăm în termeni algebrici standard, unde t este o variabilă reală care indică timpul. În timp discret lucrurile sunt oarecum diferite.

O oscilație în timp discret

MĂRIMI:

- Frecvența (pulsția): ω (radiani)
- Faza inițială: Φ (radiani)
- Amplitudinea: A

$$x[n] = Ae^{j(\omega n + \phi)}$$

$$x[n] = A[\cos(\omega n + \phi) + j \sin(\omega n + \phi)]$$

MARIN BANCOS - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

24

SLIDE 24

Oscilațiile în timp discret se caracterizează prin trei mărimi fundamentale:

- O frecvență ω , care se măsoară în radiani, și NU în radiani/secundă, deoarece, în timp discret, variabila noastră „timp”, notată cu n , este una adimensională, așa cum am stabilit.
- O fază inițială ϕ
- O amplitudine A

Secvența în timp discret se scrie așadar ca:

$$x[n] = Ae^{j(\omega n + \phi)}$$

Putem folosi *formula lui Euler* pentru a face descompunerea și a obține scrierea cu ajutorul părții reale și a părții imaginare, respectiv:

$$x[n] = A[\cos(\omega n + \phi) + j \sin(\omega n + \phi)]$$

De ce folosim exponențiala complexă?

- De ce nu, din moment ce putem folosi numerele complexe în studiul semnalelor și sistemelor digitale?
- Are sens, deoarece fiecare oscilație (descrișă ca mișcare circulară) poate fi scrisă ca sumă de sinusuri/cosinusuri
- Calculele devin mult mai simple, deoarece formulele trigonometrice și utilizarea lor se reduc la calcule algebrice

SLIDE 25

Probabil că vă puneți întrebarea: de ce să folosim exponențiala complexă în locul funcțiilor explicite sinus și cosinus?

Ei bine, în timp ce noi ne construim propria lume digitală de procesare a semnalului, am observat că putem folosi numerele complexe în sistemele digitale, deci exponențiala complexă ne ajută.

Mergând mai departe, parcurgerea cercului poate fi descrișă cu ajutorul funcțiilor sinus și cosinus, dar nu separate una de alta, ci puse laolaltă, iar *formula lui Euler* este cea care reușește să le adune, în mod compact, într-o singură funcție.

Astfel, matematica utilizată devine mult mai simplă, deoarece transformăm trigonometria și lucrul cu formulele trigonometrice în algebră simplă și operăm cu exponențiale complexe.

Avantajele exponențialei complexe

Exemplu:

- Folosind vechile metode, trebuie să stăpânim foarte bine formulele trigonometrice pentru a face transformările necesare
- În ecuațiile care rezultă se operează cu mult mai mulți termeni

$$\cos(\omega n + \phi) = \cos \phi \cos \omega n - \sin \phi \sin \omega n = a \cos \omega n - b \sin \omega n, \quad a = \cos \phi, \quad b = \sin \phi$$

SLIDE 26

De exemplu, haideți să încercăm să schimbăm faza unui cosinus prin metoda trigonometrică învățată încă din liceu.

Deci, dacă avem $\cos(\omega n + \phi)$ și dorim să scriem formula astfel încât să ne apară sub funcțiile trigonometrice separat argumentul (ωn) , atunci trebuie să ne amintim identitățile trigonometrice pentru suma unghiurilor:

$$\cos(\omega n + \phi) = \cos \phi \cos \omega n - \sin \phi \sin \omega n = a \cos \omega n - b \sin \omega n$$

Ne vom aminti noi oare, întotdeauna, dacă este plus sau minus între termeni? Sau cine sunt a și b, din formula restrânsă?

Dacă vom dori să parcurgem drumul invers, vă asigur că ne va fi și mai greu...

Avantajele exponențialei complexe

Exemplu: schimbarea fazei unui cosinus „pur” folosind exponențiale complexe

$$\cos(\omega n + \phi) = \operatorname{Re}\{e^{j(\omega n + \phi)}\} = \operatorname{Re}\{e^{j\omega n} \cdot e^{j\phi}\}$$

- Sinusul și cosinusul „conviețuiesc” fără a complica lucrurile
- Schimbarea de fază se reduce la o simplă înmulțire de exponențiale
- Notățiile sunt mai simple

SLIDE 27

Dacă, însă, ne propunem să schimbăm faza funcției cosinus folosind algebra complexă, vom avea:

$$\cos(\omega n + \phi) = \operatorname{Re}\{e^{j(\omega n + \phi)}\} = \operatorname{Re}\{e^{j\omega n} \cdot e^{j\phi}\}$$

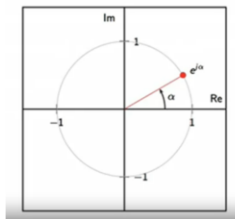
Așadar, se descompune exponențiala complexă inițială în produsul a două exponențiale complexe, iar apoi nu avem decât să evaluăm partea reală a acestui produs.

Nu va fi nicio problemă în a efectua înmulțirea a două numere complexe, după ce le separăm părțile reală și imaginară. Vom obține rezultatul fără vreun efort deosebit, după calcule algebrice simple. Funcțiile sinus și cosinus conviețuiesc, așadar, laolaltă, defazarea devine o simplă înmulțire, iar notațiile sunt mult simplificate.

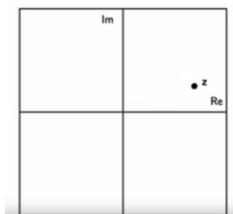
Am stabilit, prin urmare, că exponențiala complexă ne este prietenă și ne va ajuta să parcurgem drumul mai departe.

EXPONENȚIALA COMPLEXĂ

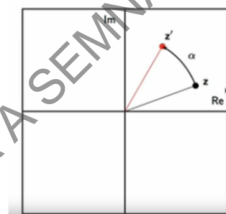
$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$



Punct din planul complex



Rotatie:



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

28

SLIDE 28

Numărul complex $e^{j\alpha}$ este numărul complex având partea reală $\cos \alpha$ și partea imaginară $\sin \alpha$. Modulul său este întotdeauna egal cu 1 (de ce?), deci punctul

$$e^{j\alpha} = \cos \alpha + j \sin \alpha$$

se află întotdeauna pe cercul de rază egală cu 1.

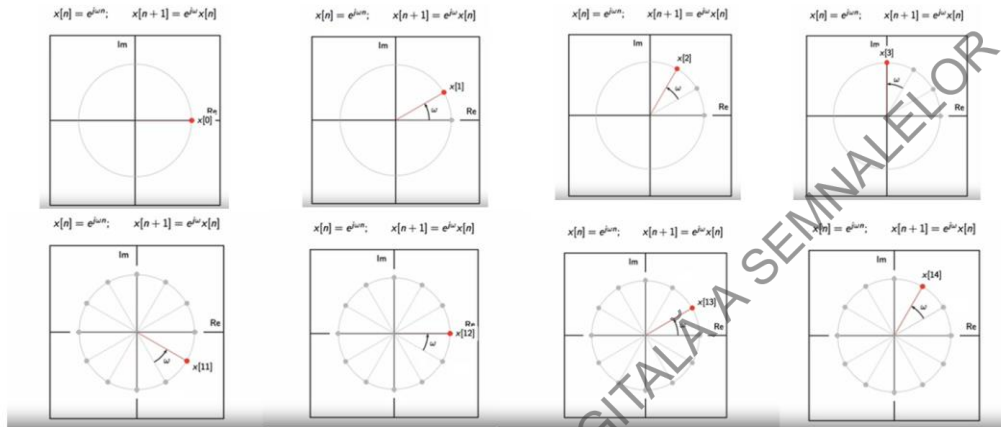
Să vedem cum găsim acest punct. Ei bine, călătorim de-a lungul cercului unitate în sens invers acelor de ceasornic (adică în sens trigonometric) până ajungem la un unghi egal cu α , unde α este exprimat în radiani. Acest punct corespunde poziției exponențialei noastre complexe $e^{j\alpha}$.

Dacă avem un punct z în planul complex și înmulțim acest punct cu $e^{j\alpha}$, trebuie să rotim acest punct, în sens invers acelor de ceasornic, cu un unghi α , pe un cerc cu centrul în origine și cu raza egală cu modulul lui z .

Așadar, putem folosi înmulțirea cu o exponențială complexă pentru a roti orice punct din planul complex.

Această observație stă la baza unei veritabile mașini de *generare de exponențiale complexe*, cu ajutorul căreia vom crea toate semnalele exponențiale complexe pe care le vom folosi în viitor.

Dacă nu avem fază inițială



MARIN BĂNCȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

29

SLIDE 29

Fie o secvență $x[n] = e^{j\omega n}$, unde ω este frecvența secvenței exponențiale complexe. Deoarece:

$$x[n+1] = e^{j\omega(n+1)} = e^{j\omega n + j\omega} = e^{j\omega n} \cdot e^{j\omega} = x[n] \cdot e^{j\omega},$$

putem obține fiecare element al secvenței prin înmulțirea elementului anterior, adică $x[n]$, cu exponențiala $e^{j\omega}$. Deci, putem să generăm astfel, recursiv, o întreagă secvență exponențială complexă.

Dacă reprezentăm secvența de puncte în plan, totul va începe dintr-un singur punct, respectiv cel inițial, considerat de obicei pentru $n = 0$.

Hai deți să presupunem că: $x[0] = e^{j\omega 0} = e^0 = 1$. Marcăm acest punct pe cercul unitate.

Următorul pas va corespunde, conform formulei stabilite, lui:

$$x[1] = e^{j\omega} x[0] = e^{j\omega}.$$

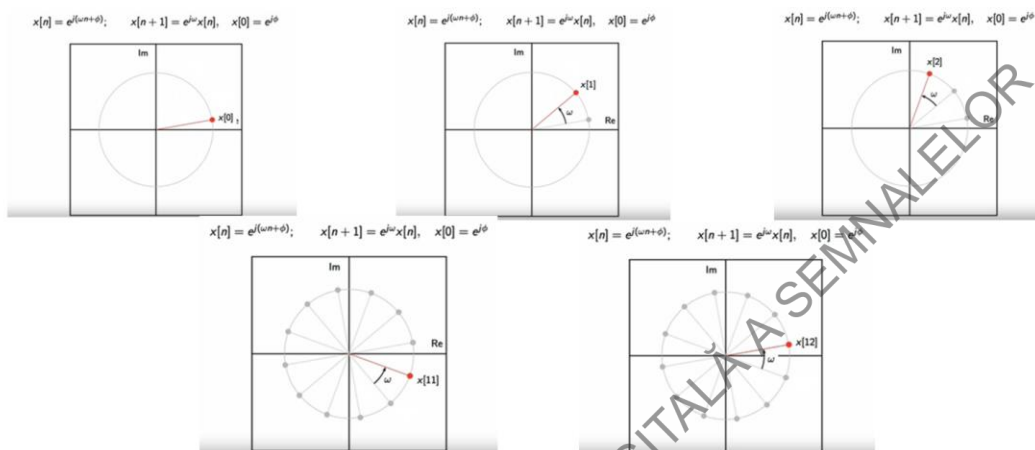
Ne mutăm cu un unghi ω , în sens invers acelor de ceasornic, pe cercul de rază 1, în punctul figurat și îl marcăm cu $x[1]$.

La pasul următor ne vom deplasa cu un alt unghi ω , și vom marca noua poziție pe cerc, corespunzătoare lui $x[2]$.

Și așa mai departe, procedând identic, putând genera astfel întregul semnal exponențial complex...

Aici, în acest exemplu, vedeți că după 12 pași ne întoarcem în punctul inițial. Este clar că întregul cerc, care corespunde la 2π radiani, a fost împărțit în 12 părți egale, și prin urmare am considerat, de fapt, $\omega = \frac{2\pi}{12}$. Pentru că în 12 pași ne-am întors la punctul de plecare, după ce parcurgem tot cercul succesiunea se repetă.

Dacă avem fază inițială



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

30

SLIDE 30

Desigur, punctul inițial nu trebuie să fie 1, ci putem începe din orice punct al planului complex. Punctul inițial din figură corespunde, de această dată, unei faze inițiale ϕ . Secvența exponențială complexă se va construi exact în același mod. Avansăm în sens invers acelor de ceasornic, cu câte un unghi ω la fiecare pas. Și aici, de exemplu, păstrăm aceeași frecvență $\omega = \frac{2\pi}{12}$.

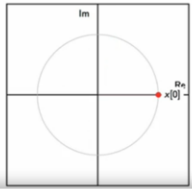
În același mod, revenim în punctul de plecare și vom repeta modelul, încă o dată, la fiecare 12 pași.

Până acum, nu prea au existat surprize, fiind respectate cele învățate în algebra standard a numerelor complexe.

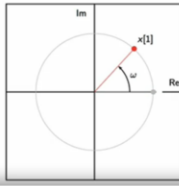
ATENȚIONARE IMPORTANTĂ:

Nu orice exponențială complexă este periodică în timp

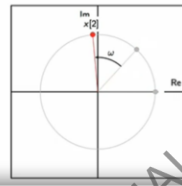
$$x[n] = e^{j\omega n}; \quad x[n+1] = e^{j\omega} x[n]$$



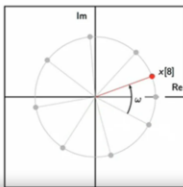
$$x[n] = e^{j\omega n}; \quad x[n+1] = e^{j\omega} x[n]$$



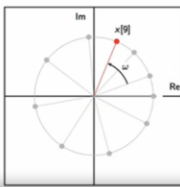
$$x[n] = e^{j\omega n}; \quad x[n+1] = e^{j\omega} x[n]$$



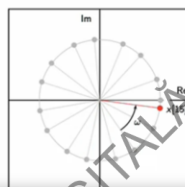
$$x[n] = e^{j\omega n}; \quad x[n+1] = e^{j\omega} x[n]$$



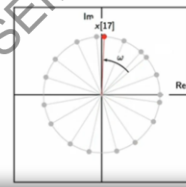
$$x[n] = e^{j\omega n}; \quad x[n+1] = e^{j\omega} x[n]$$



$$x[n] = e^{j\omega n}; \quad x[n+1] = e^{j\omega} x[n]$$



$$x[n] = e^{j\omega n}; \quad x[n+1] = e^{j\omega} x[n]$$



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

31

SLIDE 31

Iată, însă, o observație cheie despre exponențialele complexe în timp discret:

„În timp discret, nu orice exponențială complexă este periodică.”

De fapt, dacă vom alege un ω oarecare, există o mare probabilitate să nu mai revenim niciodată în niciunul dintre punctele anterioare ale secvenței exponențiale complexe figureate pe cerc. Vedem asta pe imaginile din slide.

CONDIȚIA DE PERIODICITATE A EXPONENȚIALEI COMPLEXE ÎN TIMP DISCRET

$$e^{j\omega n} \text{ periodic in } n \iff \omega = \frac{M}{N} 2\pi, M, N \in \mathbb{N}$$

$$\begin{aligned} x[n] &= x[n + N] \\ e^{j(\omega n + \phi)} &= e^{j(\omega(n+N) + \phi)} \\ e^{j\omega n} e^{j\phi} &= e^{j\omega n} e^{j\omega N} e^{j\phi} \\ e^{j\omega N} &= 1 \end{aligned}$$

Condiția de periodicitate se reduce la:
 $e^{j\omega N} = 1$

Însă:
 $1 = e^{j0} = e^{j2\pi} = e^{j4\pi} = \dots = e^{j2\pi M}, \text{ cu } M \in \mathbb{Z}$

Condiția de periodicitate a exponențialei complexe în timp discret:

$$\omega N = 2\pi M \iff \omega = \frac{M}{N} \cdot 2\pi$$

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

32

SLIDE 32

Ceea ce se întâmplă, însă, este că exponențiala complexă este periodică în n numai dacă frecvența ω este un multiplu rațional de 2π .

Deci, numai dacă are forma unei fracții, adică a unui raport de două numere întregi, raport care se înmulțește cu 2π . Să justificăm de ce trebuie să fie așa.

Amintiți-vă condiția de periodicitate pentru o secvență în timp discret:

$$x[n] = x[n + N],$$

unde N este un număr întreg care indică *perioada secvenței*.

Dacă folosim secvențe exponențiale complexe în mod explicit, ajungem (urmăriți formulele din slide) la faptul că această condiție de periodicitate se reduce la:

$$e^{j\omega N} = 1$$

Însă:

$$1 = e^{j0} = e^{j2\pi} = e^{j4\pi} = \dots = e^{j2\pi M}, \text{ cu } M \in \mathbb{Z}$$

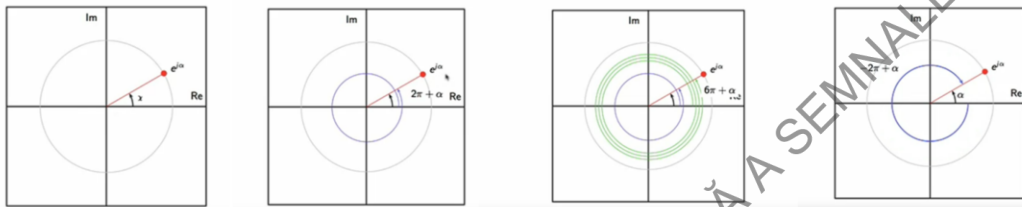
Vom avea:

$$\omega N = 2\pi M \iff \omega = \frac{M}{N} \cdot 2\pi$$

Vă rog să rețineți această **condiție importantă** ce trebuie impusă frecvenței ω pentru a se asigura periodicitatea.

2π – PERIOADA PRINCIPALĂ A EXPONENȚIALEI COMPLEXE ÎN TIMP DISCRET

$$e^{j\alpha} = e^{j(\alpha+2k\pi)} \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$



MARIN BANCOS - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

33

SLIDE 33

Acum, să revenim la un punct arbitrar al cercului de rază 1, să spunem: $e^{j\alpha}$.

Este clar că putem adăuga orice multiplu de 2π , pozitiv sau negativ, la valoarea lui α , și vom ajunge tot în aceeași poziție pe cerc. Cu alte cuvinte, același punct de pe cercul unitar poate avea mai multe „nume”.

El la fel de bine ar putea fi $e^{j\alpha}$ sau $e^{j(2\pi+\alpha)}$ sau $e^{j(6\pi+\alpha)}$.

Tot așa ar putea fi, mergând în sens invers, $e^{j(-2\pi+\alpha)}$, și așa mai departe.

Avem, deci, un singur punct pe cerc, dar foarte multe „nume” pentru el... O infinitate chiar. Este ceea ce numim „aliasing”.

Consecința aliasing-ului, a acestei proprietăți naturale a exponențialei complexe, este că, în timp discret, ea va pune o limită la cât de „repede” putem ocoli cercul unitar în timp discret.

Este posibil ca dumneavoastră să fi experimentat deja consecințele acestei limite superioare a vitezei pe care noi o putem atinge în timp discret. De exemplu, dacă ați vizionat un film western.

Hai deți să privim imaginile următoare, cu diligența care se deplasează într-o singură direcție. Fiți atenți la roțile acestora, care par să se miște alternativ, înapoi și înainte, parcă imprevizibil.

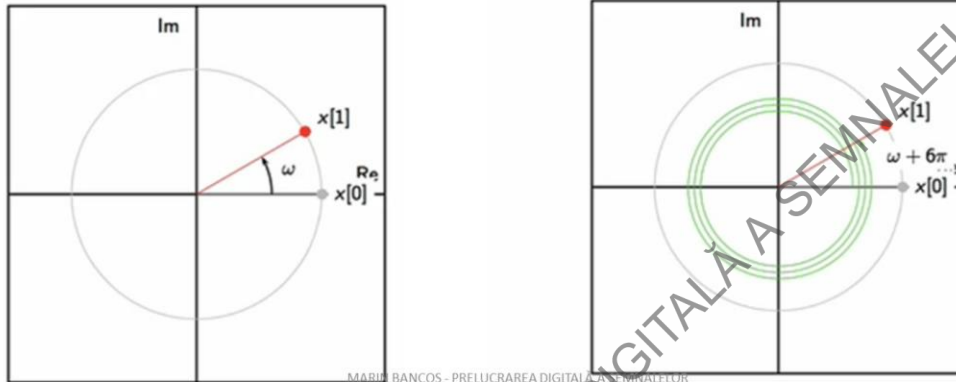


SLIDE 34 (DILIGENȚA)

STAGECOACH – Secvență din acest film de Oscar, din 1939, cu John Wayne.



SĂ NE REAMINTIM GENERATORUL DE EXPONENȚIALE COMPLEXE



MARIN BANCOS - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

35

SLIDE 35

Pentru a înțelege de ce se întâmplă asta, revenim la mașina de generare a exponențialei complexe.

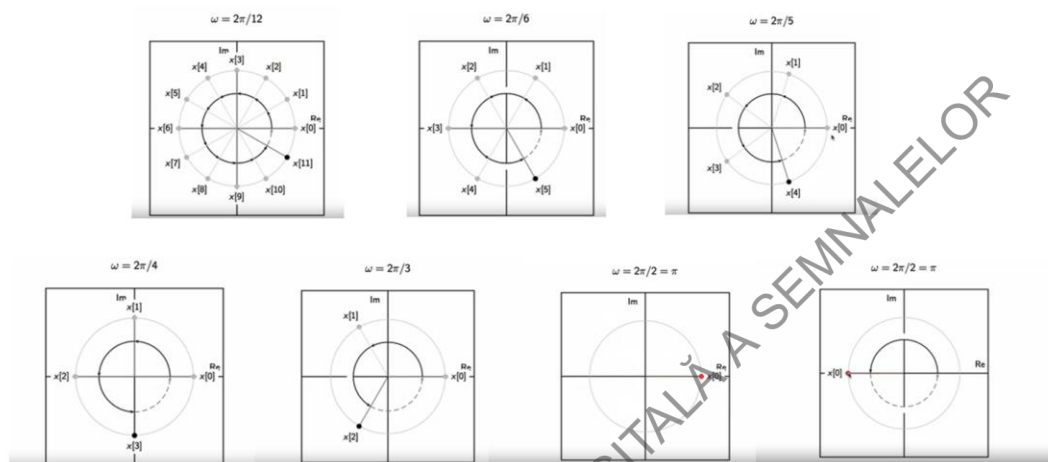
Este destul de intuitiv să înțelegem că frecvența este restricționată la intervalul de la 0 la 2π . Dacă încercăm să folosim o frecvență mai mare de 2π , ceea ce ni se va întâmpla este că ne vom lovi automat de fenomenul numit „aliasing”.

Dacă, la fiecare pas n , parcurgem un unghi ω , pentru crearea următoarei poziții $(n+1)$, ei bine, am obține exact același rezultat și dacă am folosi un pas care este ω plus un multiplu de 2π .

Deci, ori de câte ori ieșim în afara intervalului $[0, 2\pi]$, din cauza periodicității cu 2π a exponențialei complexe, revenim printr-o operațiune „modulo” tot în intervalul $[0, 2\pi]$.

Dar chiar și în acest interval, $[0, 2\pi]$, trebuie să fim foarte atenți la mișcări, așa că haideți să analizăm și mai detaliat acest lucru.

Cât de „repede” putem ...



MARIN BANCOS - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

36

SLIDE 36

Aici, în imagine, aveți primele 12 poziții corespunzătoare unei exponențiale complexe la frecvența $\omega = \frac{2\pi}{12}$. Deci, această secvență necesită 12 eșantioane pentru a putea face o mișcare de revoluție completă pe circumferința cercului unitate.

Dacă vrem să mergem mai repede, atunci trebuie să alegem o frecvență mai mare.

Spre exemplu, să alegem $\omega = \frac{2\pi}{6}$. În acest caz, vom face doar șase pași pentru a finaliza o mișcare de revoluție completă.

Să încercăm să mergem și mai repede.

$\omega = \frac{2\pi}{5}$ va necesita cinci pași,

$\omega = \frac{2\pi}{4}$ va necesita patru pași,

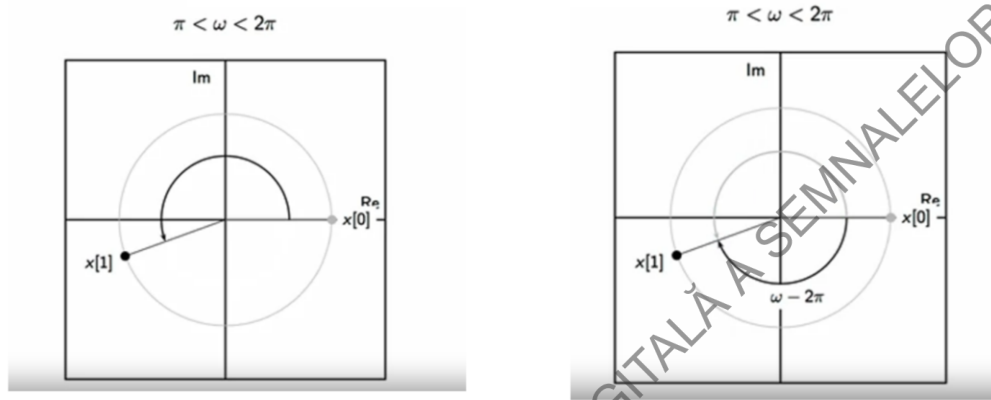
$\omega = \frac{2\pi}{3}$, trei pași și, în final,

dacă luăm o frecvență $\omega = \frac{2\pi}{2} = \pi$, ajungem la o rotație care nu este chiar o rotație.

Doar oscilăm între acest punct (+1) și acest punct (-1), adică completăm jumătate din cerc la fiecare pas.

Se poate merge mai „repede” pentru un $\omega > \pi$?

A merge mai repede într-un sens,
corespunde la a merge mai încet în sensul contrar!



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

37

SLIDE 37

Putem, oare, merge mai repede de atât? Ei bine, răspunsul este „nici vorbă”. Iar asta și dacă luăm o frecvență mai mare decât π .

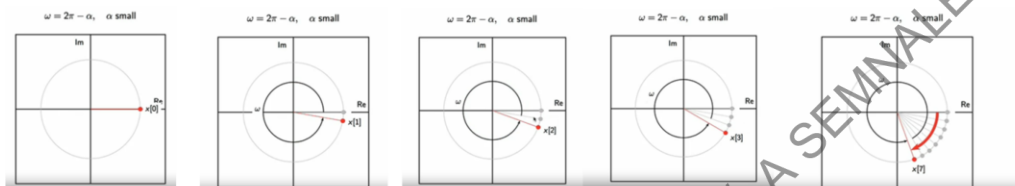
Fie un ω mai mare decât π și mai mic decât 2π . Astfel vom parcurge mai mult de jumătate de cerc într-un singur pas.

Însă, un alt mod de a privi această mișcare, dacă doriți, este acela că am parcurs $(-2\pi + \omega)$ în sens contrar, adică în sensul acelor de ceasornic. Unghiul în sens invers este evident mai mic decât cel de la parcurgerea în sens direct.

Încercarea de a merge mai repede de π , la fiecare pas, corespunde așadar mersului mai lent în sens contrar.

Ce mișcare percepem când încercăm să mergem mai repede?

$\omega = 2\pi - \alpha$, cu un α foarte mic



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

38

SLIDE 38

Lucrurile se agravează serios dacă luăm frecvența $\omega = 2\pi - \alpha$, cu un α foarte mic, deoarece, la fiecare pas parcurgem aproape un cerc complet.

Deci primul pas va fi astfel: facem tot drumul minus un mic α , apoi continuăm, și... la fiecare pas repetăm aceeași mișcare amplă.

Pe măsură ce acumulăm aceste unghiuri, putem vedea că mișcarea aparentă, chiar și la viteza mică cu care se schimbă slidurile, corespunde unei mișcări în sensul acelor de ceasornic cu viteza α . Și țineți cont că α este foarte mic. Este exact ceea ce se întâmplă cu roțile diligenței, care au și multe spițe și care se mișcă mult mai repede în raport cu rata de derulare a cadrelor camerei de proiecție a filmului.

Mai repede sau mai încet? Aliasing!



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

39

SLIDE 39

Pentru ca lucrurile să vă fie și mai evidente, ne vom folosi acum de imaginea unei roți de bicicletă având patru spițe așezate simetric.

Deci, la această roată, cu o astfel de simetrie, unghiurile de „aliasing” vor alterna mai repede decât dacă am avea un singur punct pe circumferință care se rotește pe cercul de rază 1.

Pe măsură ce viteza unghiulară crește, iar viteza unghiulară este afișată în grade pe cadrul din colțul din stânga sus a videoclipului, putem vedea că mișcarea pare că alternează între mișcarea înainte și mișcarea înapoi. Avem apoi o percepție de staționaritate, când unghiul este de aproximativ 45 de grade. Și din nou lucrurile se repetă. Dacă ne uităm la butucul roții, care nu este perfect simetric în imagine, ne convingem că de fapt mișcarea efectivă a cadrelor este întotdeauna în același sens, înainte, și la o viteză unghiulară în creștere.