

CURSUL 2

EXEMPLE DE SEMNALE DIGITALE.

TIPURI DE SEMNALE DIGITALE.

CLASIFICAREA SEMNALELOR DIGITALE.

OPERAȚII CU SEMNALE DIGITALE.

ENERGIE ȘI PUTERE.

REDAREA SUNETULUI DE CĂTRE UN PC. EXEMPLU NUMERIC.

BLOCURI TIP: SUMATOR, MULTIPLICATOR, DE ÎNTÂRZIERE, DE MEDIERE MOBILĂ.

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

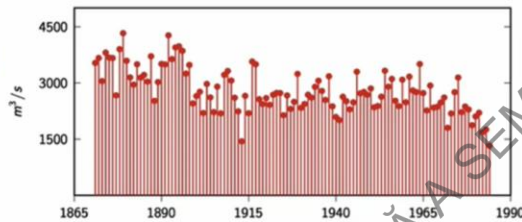
1

SLIDE 1

În cele ce urmează vom introduce în mod formal conceptul de semnal în timp discret, împreună cu exemple ale celor mai comune semnale pe care le vom întâlni în restul cursului.

Vom vorbi, de asemenea, despre operațiile de bază cu semnale în timp discret, care ne vor permite să dăm startul la proiectarea unor algoritmi esențiali.

UTILIZAREA REPREZENTĂRII ÎN TIMP DISCRET ARE O LUNGĂ TRADIȚIE...



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

2

SLIDE 2

Poate cel mai vechi exemplu cunoscut de semnal în timp discret este prezentat aici, în această fotografie.

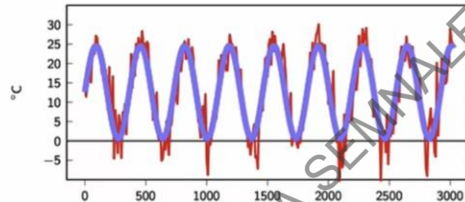
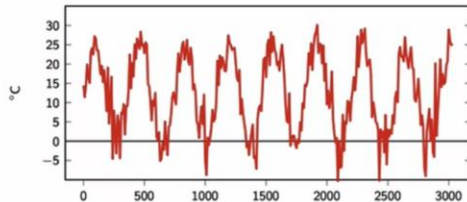
Aceasta se numește Palermo Stone și reprezintă, folosind hieroglife, nivelul râului Nil pentru un număr de ani. Deci fiecare dreptunghi de aici este un an cu nivelul râului, parcurgându-se astfel un număr de ani din jurul lui 2500 î.Hr. În Egiptul Antic, fertilitatea malurilor Nilului a dictat cu adevărat bogăția statului. Era foarte important pentru faraonii Egiptului să aibă o înregistrare istorică a nivelurilor anterioare ale inundațiilor, pentru a putea încerca să anticipeze ce va aduce anul următor. Avem așadar o secvență în timp discret, care a fost folosită pentru prelucrare și obținere a unei predicții a fertilității următorului sezon agricol.

Astăzi, aceleași date ar fi reprezentate ca în figură. Avem o diagramă unde, pe axa orizontală, notăm anii, iar pe axa verticală, debitul mediu al râului în metri cubi pe secundă.

Observați că fiecare reprezentare folosește un simbol *lollipop* (notație ce seamănă cu o acadea). Folosim această notație atunci când vrem să ne asigurăm că avem de a face cu o secvență în timp discret și avem un set numărabil de valori, nu o funcție continuă de timp.

METEOROLOGIE: măsurarea zilnică a temperaturii

DACĂ EȘANTIOANELE SUNT SUFICIENT DE APROPIATE ÎNTRE ELE...



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

3

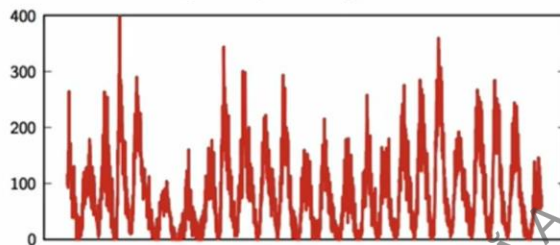
SLIDE 3

Uneori însă, numărul de puncte din grafic este atât de mare încât notația introdusă ar fi mult prea greoaie. Așa că renunțăm la bățul acadelei și punem doar punctele.

Acestea ajung adesea să fie atât de aproape unele de altele încât dau impresia unei funcții de timp continue. Aici, de exemplu, aveți o diagramă a temperaturii zilnice de peste 3.000 de puncte. Așadar 3.000 de zile, adică aproximativ 10 ani. Arată ca o funcție de timp continuă, dar descrie, de fapt, măsurători discrete luate în fiecare zi. Se poate observa că ne apare, parcă, un model periodic.

Puteți să suprapuneți o sinusoidă peste acest set de date. Iar sinusoida va avea o perioadă de 365 de zile, ceea ce este, desigur, în concordanță cu faptul că Pământul își repetă tiparul sezonier la fiecare trecere în jurul Soarelui.

ASTRONOMIE: monitorizarea activității solare (lunar, între anii 1749 și 2015)



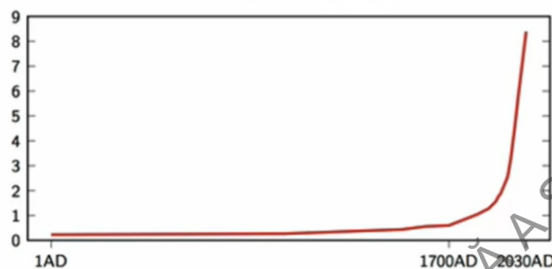
MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

4

SLIDE 4

Astronomia folosește o mulțime de secvențe în timp discret. Aceasta este, de exemplu, o reprezentare a numărului de pete solare și descrie activitatea Soarelui pentru o anumită perioadă. Lucrul interesant este că datele au fost culese și păstrate pentru o perioadă foarte îndelungată de timp, ele fiind înregistrate în fiecare lună, începând cu anul 1749. O mulțime impresionantă de puncte...

ISTORIE ȘI SOCIOLOGIE: Populația lumii exprimată în miliarde



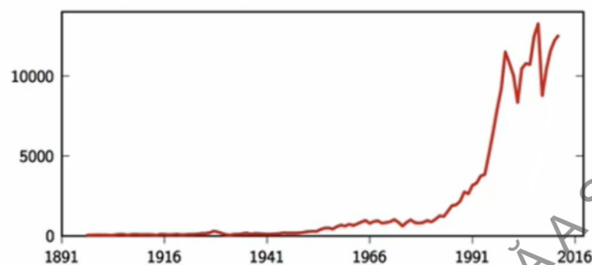
MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

5

SLIDE 5

Istoria și sociologia sunt și ele domenii interesante, din care putem extrage exemple ce se pretează la reprezentarea ca secvențe în timp discret. Luăm, ca exemplu, măsurarea/estimarea anuală a populației mondiale, începând din anul 1 d.Hr. și până la o proiecție pentru anul 2030. Puteți vedea că, probabil, vom avea o mică problemă aici, întrucât tendința pare a fi una exponențială.

ECONOMIE: evoluția indicelui Dow Jones



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

6

SLIDE 6

Alte secvențe sunt creație exclusivă a omului, cum ar fi următorul exemplu luat din economie. Aveți aici reprezentarea indicelui Dow Jones, indice care măsoară, într-un fel, starea de sănătate a economiei. Indicele a fost destul de scăzut pentru cea mai bună parte a secolului trecut, iar apoi a crescut aproape exponențial. Ceea ce este interesant e faptul că prăbușirea economică din 1929, un fel de dezastru mondial major, este aici doar o mică gălmă, ce nici nu se compară cu variațiile nivelurilor de astăzi.

FORMALIZAREA NOȚIUNILOR

SEMNALUL DIGITAL (DISCRET): este definit ca șir de numere complexe

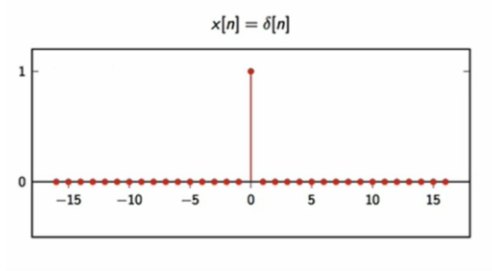
$$x : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C}$$

În notația $x[n]$ avem n un „timp” golit de semnificația din fizică, fiind o mărime adimensională

SLIDE 7

După aceste exemple, extrem de variate, încercăm să formalizăm conceptul de semnal în timp discret. Pentru noi el este o secvență, un șir de numere complexe. Așadar o secvență unidimensională, cel puțin pentru moment. Notația este $x[n]$, unde n este între paranteze drepte pentru a indica faptul că n este un număr întreg. Numărul n ia valori de la minus infinit la plus infinit și pune în corespondență $\mathbb{Z}$, mulțimea numerelor întregi, cu valori din $\mathbb{C}$, mulțimea numerelor complexe. Considerăm n ca fiind un timp adimensional, lipsit de unitate de măsură, deci nu timp în sensul fizic. El doar stabilește o ordine a valorilor măsurate în șirul construit.

Semnalul delta în timp discret



$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

8

SLIDE 8

Cel mai simplu semnal non-trivial la care ne putem gândi este unul în care fiecare eșantion are valoarea 0, pentru orice n , cu excepția cazului $n = 0$, unde eșantionul ia valoarea 1.

Acesta se numește *semnal discret (digital) delta* și exemplifică un fenomen fizic care are o durată foarte, foarte scurtă în timp.

UN EXEMPLU CULES DE LA HOLLYWOOD: clapper pentru sincronizarea audio-video



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

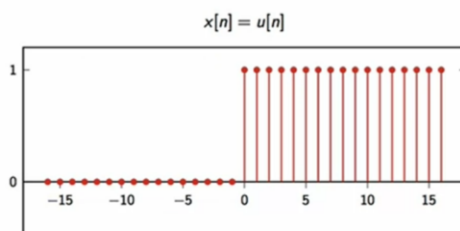
9

SLIDE 9

Putem asocia semnalului delta exemplul unui *clapper*, dispozitivul care este utilizat în industria cinematografică, deși nu neapărat în forma pe care o vedeți aici în această imagine, pentru a sincroniza înregistrările audio și video. Când se înregistrează un film, videoclipul și sunetul sunt înregistrate pe dispozitive separate, iar ele trebuie apoi sincronizate.

Modul în care se face acest lucru este înregistrând clapperul video și audio, atunci când partea superioară a clapperului se trănțește brusc peste partea inferioară. El va genera un sunet instantaneu foarte scurt care în înregistrare arată ca un semnal delta sau o combinație de semnale delta, pozitive și negative. La sincronizarea audio-video, se caută acest sunet specific în audio și îl vom asocia cu cadrul filmat, acolo unde partea superioară a clapperului lovește partea inferioară.

Semnalul treaptă-unitate în timp discret



$$u[n] = \begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

10

SLIDE 10

Un alt semnal util este *semnalul discret treaptă unitate*. Acesta este un semnal care ia valoarea 0, pentru toate valorile negative ale indicelui n , și 1, în rest.

Deci $x[n] = 0$, pentru n mai mic decât 0, și este egal cu 1, pentru n mai mare sau egal cu 0. Acest semnal descrie un fenomen foarte simplu, precum acționarea unui comutator.

Comutatorul lui Frankenstein



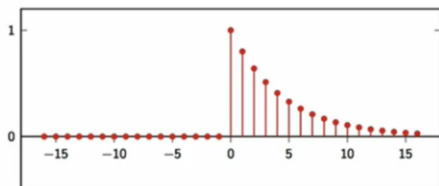
MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

11

SLIDE 11

Gândiți-vă la *comutatorul Frankenstein* când acesta era tras în sus și se realiza contactul. În acest fel semnalul trecea din 0 în 1 și rămânea pe 1 pentru totdeauna.

Semnalul scădere exponențială în timp discret



$$x[n] = a^n u[n], \quad a \in \mathbb{C}, |a| < 1$$

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

12

SLIDE 12

Un alt semnal important este *descreșterea (scăderea) exponențială în timp discret*. Fixăm o valoare a mai mică decât 1 în valoare absolută și luăm puteri succesive ale lui modul de a . Cum acesta este subunitar, puterile sale succesive vor scădea exponențial către 0, dar desigur, nu vor ajunge niciodată la 0, decât dacă mergem la infinit. Pentru a preveni „explozia” semnalului atunci când n este negativ, facem înmulțirea cu semnalul treaptă-unitate. Deci, practic, forțăm la 0 toate valorile secvenței pentru valori negative ale indicelui n . Descreșterea exponențială surprinde comportamentul multor sisteme fizice.

Cât de repede ni se răcește cafeaua?

Conform legii lui Newton de răcire a corpurilor:



$$\frac{dT}{dt} = -c(T - T_{\text{env}})$$

$$T(t) = T_{\text{env}} + (T_0 - T_{\text{env}})e^{-ct}$$

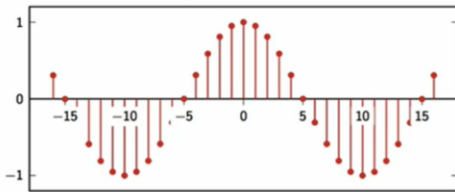
MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

13

SLIDE 13

De exemplu, după o astfel de lege ni se răcește ceașca de cafea. *Legea răcirii lui Newton* spune că viteza de schimbare a temperaturii unui corp este proporțională cu diferența de temperatură dintre mediu și corpul însuși. Deci, dacă rezolvi această ecuație diferențială, afli că evoluția temperaturii urmează, într-adevăr, o tendință de descreștere exponențială. Desigur, aceasta este o versiune idealizată a modului în care o cafeaua se răcește. Dar, în general, avem aici un comportament comun pentru o mulțime de sisteme fizice. Am văzut, de exemplu, că rata de descărcare a condensatorului într-un circuit RC este, de asemenea, o curbă cu descreștere exponențială. În timp discret, semnalul definit de noi modelează matematic acest tip de comportament.

Semnalul sinusoidal în timp discret



Semnalele:

$$x[n] = \sin(\omega_0 n + \phi)$$

$$x[n] = \cos(\omega_0 n + \phi)$$

sunt cazuri particulare ale
exponențialei complexe în timp
discret:

$$x[n] = e^{j(\omega_0 n + \phi)}$$

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

14

SLIDE 14

Și, în sfârșit, avem *semnalele sinusoidale în timp discret*. Aici secvența în timp discret reprezentată este cea din cazul cosinusului cu faza inițială zero. În general, notăm frecvența unghiulară cu ω_0 , timpul discret cu n și faza inițială cu ϕ . Cum ω_0 se măsoară în radiani și ϕ se măsoară în radiani, iar n este adimensional, suma lor, adică faza, se măsoară tot în radiani. Acestea sunt, fără doar și poate, cele mai importante, deoarece nici nu mai este nevoie să subliniem răspândirea comportamentului oscilator în natură.

Oscilațiile sunt prezente peste tot!



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

15

SLIDE 15

Bătăile inimii fiecăruia dintre noi, motoarele, mișcarea valurilor, vibrația corzilor instrumentelor muzicale... Toate sunt exemple relevante în acest sens. Dar în procesarea semnalului, oscilațiile sunt esențiale deoarece ele se află în centrul analizei Fourier, așa cum vom vedea foarte curând.

O CLASIFICARE A SEMNALELOR DIGITALE (DISCRETE)

- Semnale digitale de lungime finită
- Semnale digitale de lungime infinită
- Semnale digitale periodice
- Semnale digitale de suport finit

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

16

SLIDE 16

Este util să împărțim semnalele în timp discret în patru categorii: de lungime finită, de lungime infinită, periodice și de suport finit. Acum le vom analiza pe rând.

Semnale digitale de lungime finită

Utilizăm în mod uzual notația introdusă anterior:

$$x[n], \quad n = 0, \dots, N-1$$

dar putem utiliza și notația vectorială:

$$\mathbf{x} = [x_0 \ x_1 \ \dots \ x_{N-1}]^T$$

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

17

SLIDE 17

Semnalele de lungime finită sunt semnale care conțin doar N eșantioane. Le indicăm cu notația $x[n]$, ca și pentru secvențele standard, dar specificăm întotdeauna intervalul indicelui n , care va merge de la 0 la $(N-1)$. Atenție, semnalul nu este definit pentru alte valori ale lui n , din afara acestui interval.

Uneori vom folosi și notația vectorială, iar în acest caz, semnalul este reprezentat ca un vector coloană. Legăturile dintre semnalele de lungime finită și vectori vor fi clare în curând, când vom parcurge una dintre prelegerile viitoare. Semnalele de lungime finită sunt entități foarte practice și frecvent folosite în cazul pachetelor de date numerice. Acolo vom avea întotdeauna de-a face cu o matrice de date în care dimensiunea matricei este finită. Cu toate acestea, nu este practic să dezvoltăm întreaga teorie a procesării semnalelor concentrându-se doar pe semnale de lungime finită.

Semnale digitale de lungime infinită

Utilizăm notația introdusă anterior:

$$x[n], \text{ cu } n \in \mathbb{Z}$$

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

18

SLIDE 18

Semnalele de lungime infinită sunt secvențe standard în care indicele n ia valori întregi de la minus infinit la plus infinit. Desigur, discutăm despre entități abstracte, deoarece ele conțin o cantitate infinită de date. Dar ele sunt foarte bune pentru dezvoltarea teoriei și în cazul rezultatelor care nu depind de lungimea secvenței datelor.

Semnale digitale periodice

Un semnal digital de perioadă N este unul pentru care:

$$\tilde{x}[n] = \tilde{x}[n + kN], \quad k \in \mathbb{Z}$$

SLIDE 19

La *semnalele periodice* datele se repetă la fiecare N eşantioane. Vom folosi notația $\tilde{x}$ cu tildă, pentru a indica în mod explicit periodicitatea semnalului. Relația dată evidențiază o succesiune periodică infinită de câte N eşantioane. Să observăm că întreaga cantitate de informație conținută de semnal într-o singură secvență, de perioadă N , este exact aceeași cu cantitatea de informație conținută de un semnal de lungime finită N . Deci, cumva, secvențele periodice stabilesc o punte naturală între finit și lungimi infinite, au o cantitate finită de informații, dar au o lungime infinită.

Semnale digitale de suport finit

Un semnal digital de suport N este unul de forma:

$$\bar{x}[n] = \begin{cases} x[n], & \text{dacă } 0 \leq n < N \\ 0, & \text{în rest} \end{cases} \quad \text{pentru } n \in \mathbb{Z}$$

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

20

SLIDE 20

În cele din urmă, avem *semnalele de suport finit N* , care sunt secvențe de lungime infinită, dar cu un număr finit de eșantioane diferite de zero. Vom indica acest lucru notând semnalul cu $\bar{x}$, iar asta înseamnă că suportul semnalului este unul compact, în afara acestui suport eșantioanele fiind toate de valoare zero. Cantitatea de informații a unei secvențe de suport finit N este aceeași ca la o secvență de lungime finită N . Și semnalele de suport finit pot fi văzute ca o punte între cele de lungime finită și cele de lungime infinită.

Secvență de lungime finită → Secvență de lungime infinită

- 1) transformând-o într-o secvență de suport finit N , prin adăugarea de 0-uri, atât înainte, cât și după intervalul dintre 0 și $(N-1)$
- 2) transformând-o într-o secvență periodică de perioadă N

SLIDE 21

Să reținem că putem întotdeauna încorpora o secvență de lungime finită N într-o secvență de lungime infinită, pe una dintre următoarele două căi:

1. transformând-o într-o secvență de suport finit N , prin adăugarea de 0-uri, atât înainte, cât și după intervalul dintre 0 și $N-1$.
2. prin periodizarea secvenței de lungime finită N , adică transformând-o într-o secvență periodică de perioadă N

Operații Elementare

- SCALARE (înmulțire cu un scalar) $y[n] = \alpha x[n]$
- SUMĂ (însuflare/adunare) $y[n] = x[n] + z[n]$
- PRODUS (înmulțire) $y[n] = x[n] \cdot z[n]$
- DEPLASARE
(avans/anticipare sau întârziere) $y[n] = x[n - k]$

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

22

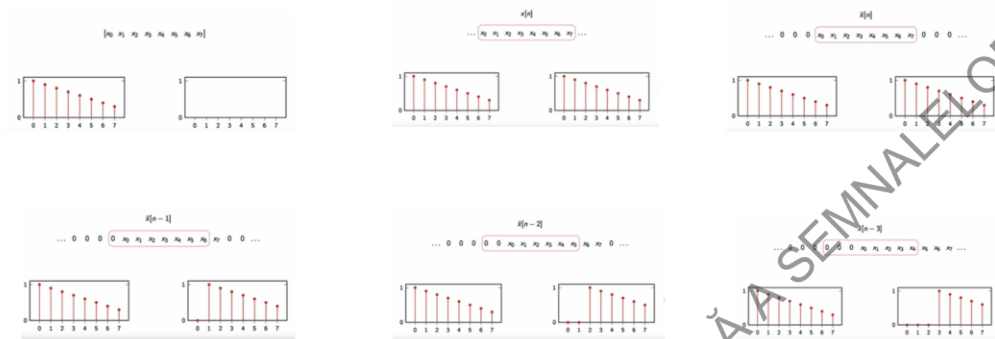
SLIDE 22

Operațiile elementare cu semnale (secvențe) discrete (digitale) includ:

1. Scalarea (înmulțirea cu un scalar), în care luăm secvența și înmulțim fiecare element din ea cu factorul alfa, care este o constantă oarecare ce aparține mulțimii numerelor complexe.
2. Putem aduna două semnale împreună, respectiv luăm o secvență și adăugăm la fiecare element al acestei secvențe elementul corespunzător din cea de-a doua secvență.
3. În cazul produsului se procedează ca la sumă, de această dată înmulțind fiecare element în prima secvență cu elementul corespunzător din a doua secvență.
4. Și, în sfârșit, deplasarea cu k eșantioane, unde anticipăm sau întârziem un semnal prin deplasarea secvenței cu un număr k întreg de eșantioane.

Definițiile primelor trei operații sunt valabile pentru toate clasele de semnale. În cazul ultimei, însă, trebuie să fim atenți atunci când aplicăm o deplasare la un semnal de lungime finită. Amintiți-vă că pentru un semnal de lungime finită, indicele n al lui $x[n]$ poate varia numai între 0 și $N-1$. Acum, dacă alegem k prea mare sau prea mic, putem trimite cu ușurință argumentul n în afara acestui domeniu. Deci, pentru a aplica schimbarea la un semnal de lungime finită, trebuie să decidem cum să încorporăm acel semnal într-o secvență de lungime infinită. Și avem, așa cum am arătat deja, cele două variante posibile.

DEPLASARE SEMNAL DE LUNGIME FINITĂ: DUPĂ TRECEREA LA UN SEMNAL DE SUPORT FINIT



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

23

SLIDE 23

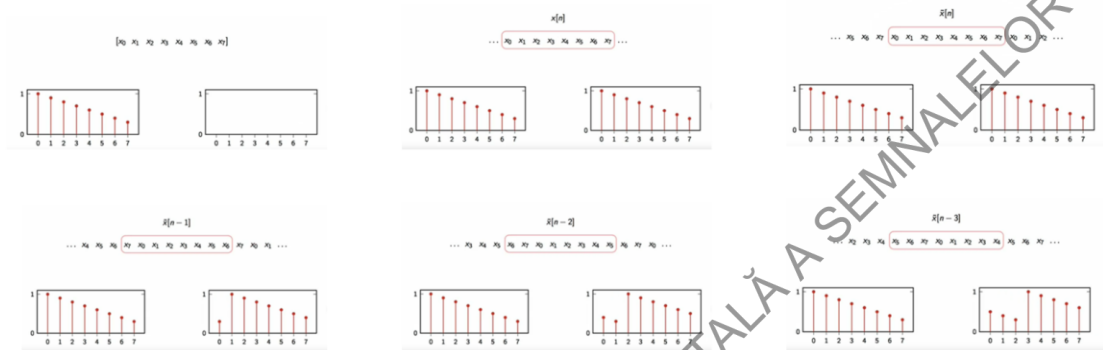
Presupunem că trecem de la semnalul de lungime finită...

... la semnal de suport finit.

În acest caz se adăugă 0 în afara intervalului de definiție a semnalului inițial. Am obținut, aici, imaginea semnalului original încorporat într-un semnal de suport finit.

Vedem acum, grafic, ce se întâmplă la deplasarea noului semnal cu 1, 2, 3 și așa mai departe. Observăm că pe măsură ce creștem întârzierea, apare în locul primelor eșantioane câte un 0. Așadar pierdem date!

DEPLASARE SEMNAL DE LUNGIME FINITĂ: DUPĂ EXTINDERE LA UN SEMNAL PERIODIC



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

24

SLIDE 24

În schimb, să ne imaginăm, acum, o extensie periodică, o periodizare a secvenței originale.

În acest caz semnalul se repetă, identic, pentru n de la minus infinit, la plus infinit.

Schimbarea va deveni una circulară. Dacă ne deplasăm, să spunem, spre dreapta, atunci ceea ce iese în dreapta se va întoarce pe cealaltă parte, la stânga. Iar rezultatul, după cum puteți vedea grafic, este că deplasăm circular datele în jurul suportului semnalului. Vom vedea mai târziu că extinderea periodică și, prin urmare, această deplasare circulară reprezintă, de fapt, modul natural de interpretare a deplasării pentru un semnal de lungime finită.

ENERGIA ȘI PUTEREA PENTRU UN SEMNAL DIGITAL

$$E_x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2$$

$$P_x = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{2N+1} \sum_{n=-N}^N |x[n]|^2$$

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

25

SLIDE 25

Definim acum *energia* pentru un semnal în timp discret. Aceasta este o sumă a pătratelor modulelor tuturor eșantioanelor. Dacă vă gândiți la valorile semnalului ca tensiuni pe un rezistor de 1 ohm, atunci puteți vedea că această definiție a energiei este consecventă cu interpretarea fizică a energiei.

Multe semnale corespund la o cantitate infinită de energie, cum este cazul semnalului treaptă-unitate, de exemplu. Dacă faci suma, vei vedea că E_x tinde la infinit. Din acest motiv, pentru a descrie proprietățile energetice ale secvențelor, se folosește conceptul de putere.

Puterea reprezintă rata de producere a energiei pentru o secvență și este definită ca limită, pentru N tinzând la infinit, a energiei calculate local, pe o fereastră $[-N, N]$, împărțită la dimensiunea ferestrei, adică la $(2N + 1)$.

ENERGIA ȘI PUTEREA ÎN CAZUL SEMNALELOR DIGITALE PERIODICE

$$E_{\tilde{x}} = \infty$$

$$P_{\tilde{x}} \equiv \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} |\tilde{x}[n]|^2$$

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

26

SLIDE 26

Dacă luăm, spre exemplu, secvențele periodice, acestea au energie infinită, pentru că se însumează valorile dintr-o perioadă de un număr infinit de ori. Dar puterea lor, dacă o calculezi, este egală cu energia dintr-o perioadă împărțită la lungimea perioadei.

O DEZVĂLUIRE:

CALCULATORUL PERSONAL – un laborator de prelucrare a semnalelor complet funcțional

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

27

Ne vom uita acum rapid la modul cum stabilim legătura între lumea abstractă a semnalelor în timp discret și ceea ce este cunoscut sub numele de „lumea analogică”, adică lumea descrisă în termenii matematici ce sunt utilizați în fizică și electronică. Apoi, vom stabili principiile care stau la baza funcționării plăcii de sunet a calculatorului vostru, atunci când redați un fișier audio digital.

Vom ilustra și un sistem de sinteză a sunetului simplu, dar surprinzător de eficient, cunoscut sub denumirea de algoritmul Karplus-Strong. Veți putea vedea că, până și cu instrumentele limitate de prelucrare digitală a semnalelor pe care le avem la dispoziție în acest moment, putem deja efectua o procesare nebanală a semnalului.

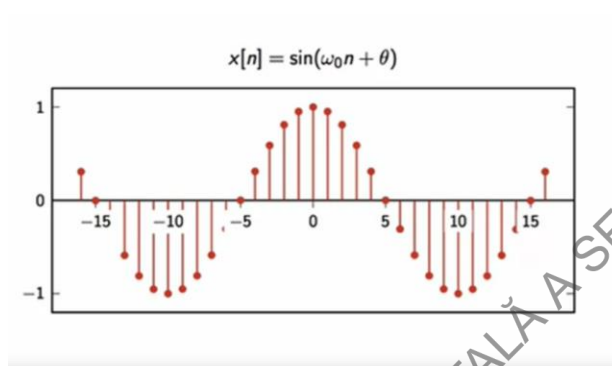
Vreau să vă spun că dacă aveți un calculator, și aproape sigur aveți unul, atunci **aveți deja un laborator de procesare a semnalelor complet funcțional la îndemână.**

Și, mai important, un calculator are și interfețe care îți permit vizualizarea semnalelor create scriind doar câteva rânduri de cod. Le puteți vizualiza reprezentarea/evoluția pe ecran și, mai important, puteți materializa semnalele în semnale audio pe care le puteți auzi cu urechile voastre.

Acum, avem categoric nevoie de o interfață, pentru că urechile noastre sunt dispozitive analogice, în timp ce calculatorul este un dispozitiv digital.

Vom vedea mai târziu în cadrul cursului detaliile transformării de la digital la analog.

Sinusoida în timp discret



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

28

SLIDE 28

Să începem cu exemplul unui semnal sinusoidal digital.

Alegem, să zicem, un sinus, cu frecvența digitală omega zero, măsurată în radiani și o fază inițială, dacă doriți, din nou măsurată în radiani.

Cum s-ar auzi o sinusoidă ca aceasta?

Ei bine, înainte de a putea răspunde, trebuie să reducem decalajul dintre reprezentarea în digital și reprezentarea analogică pe care o suportă urechile noastre.

FRECVENȚA DIGITALĂ ÎN COMPARAȚIE CU FRECVENȚA DIN FIZICĂ

În timp discret:

- n : nu are o semnificație fizică, este adimensional și utilizat numai pentru numerotarea eșantioanelor
- periodicitatea: care este *numărul* de eșantioane după care se repetă același tipar

În accepțiunea clasică:

- periodicitatea: după câte *secunde* se repetă același tipar
- Frecvența se măsoară în Hz (s la -1)

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

29

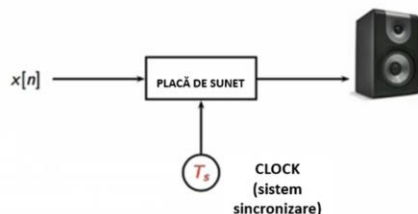
SLIDE 29

Amintiți-vă că, în timp discret, n nu are dimensiune fizică.

Periodicitatea unei forme de undă în timp discret este determinată de câte eșantioane trebuie să așteptăm înainte ca modelul să se repete.

Pe de altă parte, în lumea fizică, periodicitatea se exprimă în numărul de secunde pe care trebuie să-l așteptăm înainte ca modelul să se repete, iar frecvența este măsurată în Hz.

CUM REDĂ UN CALCULATOR SUNETUL?



MARIN BANCOS - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

30

SLIDE 30

Calculatorul compensează acest decalaj printr-o placă de sunet. Aceasta este un dispozitiv care preia seria de eșantioane și construiește, corespunzător, un semnal electric pe care îl transmite unui difuzor.

Și, important, în cadrul plăcii de sunet este Clock-ul (sistemul de sincronizare), caracterizat de o perioadă T_s , măsurată în secunde. Acest T_s este timpul așteptat înainte de a se prelua un nou eșantion din secvența în timp discret pentru a-l introduce în placa de sunet.

FRECVENȚA DIGITALĂ ÎN COMPARAȚIE CU FRECVENȚA DIN FIZICĂ

Se fixează T_s – intervalul de timp dintre două eșantioane.

Dacă perioada semnalului digital este exprimată prin valoarea M (număr de eșantioane), asta se traduce printr-o perioadă de timp de MT_s secunde.

Frecvența din fizică este: $f = \frac{1}{MT_s}$ (exprimată în Hz)

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

31

SLIDE 31

Așadar, dacă T_s este timpul exprimat în secunde, dintre două eșantioane, perioada după care se repetă cele M eșantioane în timp discret, va determina o periodicitate de MT_s secunde în domeniul analogic. Prin urmare, frecvența, așa cum o știm noi de la fizică, va deveni $1/MT_s$, fiind exprimată în Hz.

EXEMPLU NUMERIC

În mod uzual se alege F_s , adică numărul de eșantioane pe secundă, care se calculează simplu, din $T_s = 1/F_s \Leftrightarrow F_s = 1/T_s$.

Pentru $F_s = 48 \text{ kHz} = 48000 \text{ Hz}$, avem: $T_s = 20,8 \mu\text{s} = 20,8 \cdot 10^{-6} \text{ s}$.

Dacă $M = 110$, atunci: $f = \frac{1}{MT_s} = 440 \text{ Hz}$.

SLIDE 32

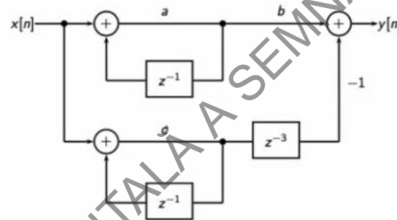
Hai să dăm un exemplu. De obicei alegem F_s , adică numărul de eșantioane pe secundă pe care îl folosim pentru placa de sunet, mai degrabă decât pe T_s . Dar relația de legătură dintre aceste două mărimi este una foarte simplă:

$$T_s = 1/F_s \Leftrightarrow F_s = 1/T_s.$$

O valoare tipică pentru F_s este cea de 48 kHz, care probabil vă este familiară, deoarece este chiar frecvența de eșantionare a unui DVD. Astfel, T_s , dacă îl calculăm, este de aproximativ 20 μs .

Să presupunem că avem o sinusoidă în timp discret, cu periodicitatea M de 110 de eșantioane. Dacă furnizăm semnal sinusoidal unei plăci de sunet la 48 kHz, obținem o sinusoidă cu un pas perceptibil de 440 Hz, care corespunde unui **ton standard din muzică** (*the standard concert pitch in Western music*).

Meccano versus PDS



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

33

SLIDE 33

Poate că unii dintre voi sunteți familiarizați jocul Meccano, un set de construcție interesant pentru o anumită vârstă. Deschizi cutia, ai o grămadă de piese metalice mici, niște piulițe și șuruburi. Și apoi îți poți folosi imaginația pentru a crea mici instrumente fanteziste.

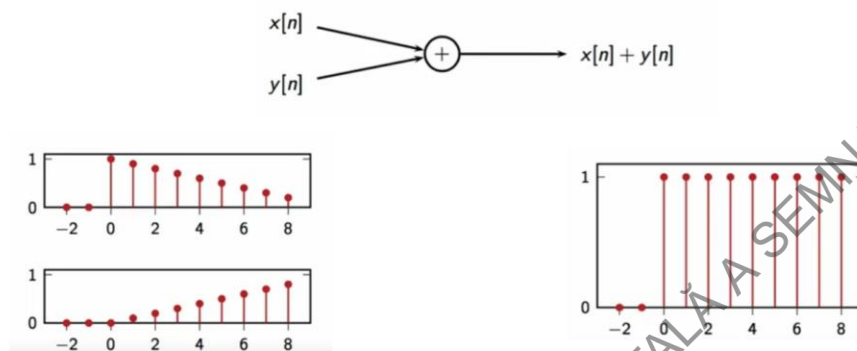
Ei bine, procesarea digitală a semnalului seamănă puțin cu asta.

Ai câteva blocuri fundamentale. Dacă ești creativ, le poți combina pentru a construi circuite cu ajutorul cărora vei efectua analiză sau sinteză.

În cele ce urmează, vom vedea care sunt aceste blocuri de bază.

Vom vedea, de asemenea, cum le putem combina pentru a explica unele lucruri simple, aparent fără nicio legătură între ele, precum acumularea dobânzii bancare sau pentru obținerea unor sunete muzicale.

Bloc sumator



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

34

SLIDE 34

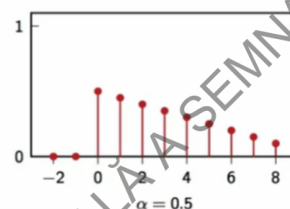
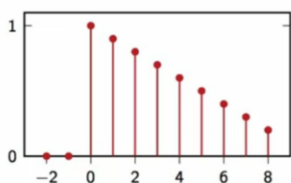
Primul dintre blocurile de bază este *blocul sumator*. Este nevoie de două secvențe la intrare și se obține o a treia secvență, care este suma lor.

De exemplu, imaginați-vă că prima secvență este una descrescătoare, iar a doua secvență este una crescătoare.

Dacă le însumați, se obține o secvență constantă. Acesta este de fapt un rezultat așteptat, atâta timp cât pantele au exact valori opuse, p și $(-p)$.

Bloc multiplicator

$$x[n] \xrightarrow{\alpha} \alpha x[n]$$



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

35

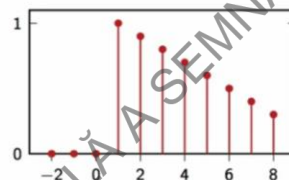
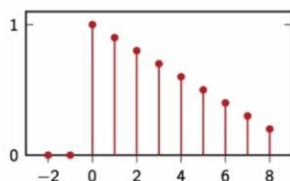
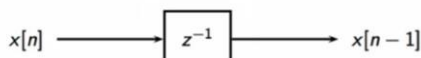
SLIDE 35

Al doilea exemplu este *blocul multiplicator*. Pentru o secvență oarecare la intrare, se obține la ieșire o versiune scalată a acesteia, adică rezultatul ce provine din înmulțirea secvenței cu constanta alfa.

Deci, de exemplu, dacă avem semnalul descrescător ilustrat, iar alfa este 0,5 ...

... atunci ceea ce se obține la ieșire este de aceeași formă, dar redus la jumătate.

Bloc de întârziere cu o unitate



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

36

SLIDE 36

Al treilea este *blocul de întârziere cu o unitate*.

Dacă avem o secvență de intrare oarecare, ceea ce obținem la ieșire este aceeași secvență întârziată exact cu un eșantion.

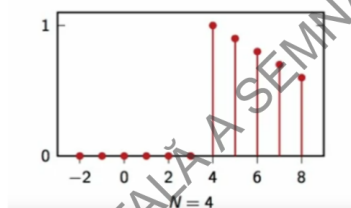
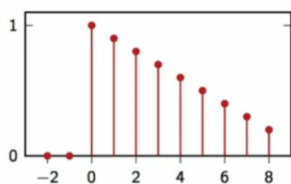
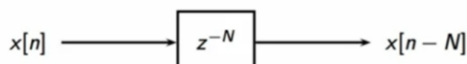
Acum, notația z^{-1} din interiorul acestui bloc ar putea părea puțin ciudată, dar va fi clarificată în câteva săptămâni, după ce discutăm despre transformata z .

Trebuie să vă gândiți la acest bloc ca la o celulă de memorie, ca la un buffer, care reține valoarea curentă și returnează în schimb valoarea anterioară.

Deci, dacă aplicăm întârzierea semnalului din figură...

... ceea ce obținem este următorul semnal.

Bloc de întârziere cu N unități



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

37

SLIDE 37

Presupunem că toate secvențele luate ca exemple corespund la semnale discrete de suport finit, având zerouri peste tot în afara porțiunii afișate a semnalului.

O generalizare a blocului prezentat anterior este blocul de întârziere cu N unități, cu ajutorul căruia se obține întârzierea intrării cu N eșantioane.

Aici noua celulă de memorie este echivalentul a N celule simple de memorie.

Ea se prezintă ca un buffer circular, în care stochezi eșantionul de la intrare și returnezi pe ieșire eșantionul pe care l-ai avut cu N pași mai devreme pe intrare.

Deci, dacă aplicăm acest lucru semnalului din figură și folosim o întârziere de $N=4$...

... avem o deplasare la dreapta cu 4 eșantioane.

Dacă N ar fi negativ, aceasta corespunde la o deplasare spre stânga și

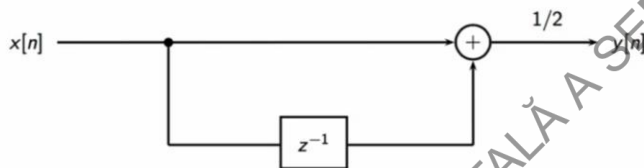
am fi în situația să anticipăm, adică să cunoaștem în avans semnalul. Desigur, anticiparea înseamnă că cunoști viitorul, iar acest lucru nu corespunde în general realității.

Dar dacă, de exemplu, avem înregistrat un sunet muzical, atunci putem merge înapoi sau înainte, pe înregistrare, în mod arbitrar.

Bloc de mediere (aritmetică) a două eșantioane consecutive: media mobilă

$$m = \frac{a + b}{2}$$

$$y[n] = \frac{x[n] + x[n-1]}{2}$$



MARIN BANCOS - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

38

SLIDE 38

Haideți să vedem cum putem folosi aceste blocuri pentru a realiza un lucru foarte simplu, o operație asupra unei secvențe oarecare, calculând media mobilă.

Media aritmetică a două numere, este suma celor două numere împărțită la 2.

O medie mobilă este o medie locală pe care o efectuăm la fiecare pas într-o secvență, astfel: se ia eșantionul curent împreună cu eșantionul anterior, se însumează cele două și se împart la 2.

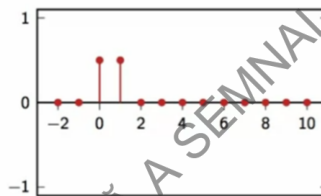
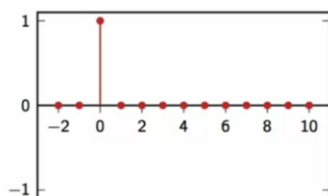
Așadar: $y[n] = x[n] + x[n-1]/2$.

Aceasta este reprezentarea cu blocuri a mediei mobile.

Să aplicăm acest lucru unui semnal și să vedem cum funcționează.

Exemple de mediere: pentru semnalul digital delta

$$x[n] = \delta[n]$$



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

39

SLIDE 39

Să alegem cel mai simplu semnal în timp discret posibil, respectiv *secvența delta*, care are zero peste tot, cu excepția lui n egal cu 0, unde valoarea sa este 1.

Dacă aplicăm media mobilă acestui semnalul, nimic nu se întâmplă **înainte ca n să ajungă la 0**. Aceasta deoarece pentru toate valorile negative ale lui n intrarea este 0, iar media a două zerouri va fi tot 0.

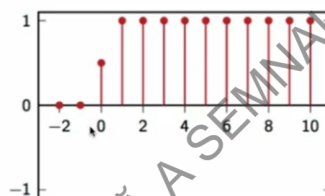
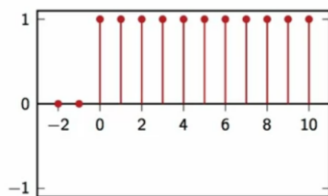
Când **n este egal cu 0**, însă, avem că $y[0]$ va fi egal cu $x[0] + x[-1]$, adică x de (0 minus 1), adică $x[-1]$, totul împărțit la 2. Cum $x[0]$ știm că este egal cu 1, $x[-1]$ este 0, avem că rezultatul este $(1+0)/2$, adică $1/2$. Deci $y[0]=1/2$.

Când **n este egal cu 1**, avem că $y[1]$ va fi egal cu $x[1] + x[0]$, adică x de 0, totul împărțit la 2. Din nou, avem $(0+1)/2$, adică $1/2$. Deci $y[1]=1/2$.

Pentru toate valorile lui n mai mari decât 1, vom avea că cele două intrări pe care le folosim la medie sunt 0, iar rezultatul va fi 0 pentru tot ce urmează.

Exemple de mediere: pentru semnalul digital treaptă unitate

$$x[n] = u[n]$$



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

40

SLIDE 40

Un alt exemplu: *semnalul discret treaptă-unitate*.

Ce se întâmplă în acest caz? Din nou, nu se întâmplă nimic pentru **valorile negative ale indicelui n**.

Prima dată când ceva se schimbă este atunci când **n este egal cu 0**, moment în care primul eșantion de ieșire va fi exact ca în cazul secvenței delta.

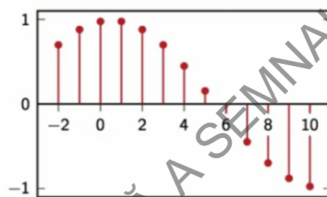
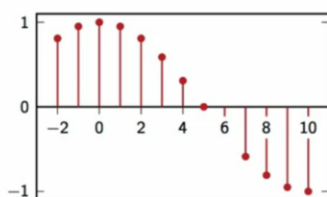
Media 0 aici și 1 aici și vom obține 1/2.

Apoi, **pentru n egal cu 1**, vom face o medie a două valori egale cu 1, și astfel media va fi tot 1.

Similar, vom avea media 1 **pentru toate valorile indicelui n mai mari decât 1**.

Exemple de mediere: pentru semnal digital sinusoidal

$$x[n] = \cos(\omega n), \quad \omega = \pi/10$$



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

41

SLIDE 41

Să încercăm acum să calculăm media mobilă în cazul unui semnal sinusoidal discret.

Pentru a vedea care este media mobilă a acestui semnal, va trebui să folosim puțină trigonometrie.

În general, rezultatul va fi egal cu:

(cosinus de omega n) plus (cosinus de omega pe lângă (n - 1), totul împărțit la 2.

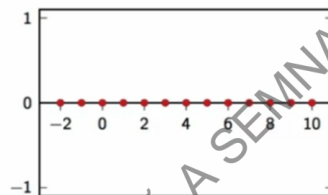
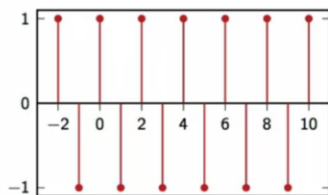
Putem folosi formule trigonometrice pentru a arăta că rezultatul care se obține este egal cu cosinus de (omega n + o fază teta).

Deci, în mod surprinzător, la medierea mobilă a semnalului sinusoidal rezultatul este tot un semnal sinusoidal, având aceeași frecvență (omega) ca intrarea, la care se adaugă doar un termen de fază (teta).

Acesta este, de fapt, un rezultat general valabil, ori de câte ori aplicăm o transformare liniară unei intrări sinusoidale!

Exemple de mediere: pentru semnal digital unitate alternantă

$$x[n] = (-1)^n$$



MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

42

SLIDE 42

O altă secvență ar putea fi secvența alternativă în care comutăm continuu între +1 și -1. Când facem media, facem întotdeauna o medie locală a două valori egale cu 1, cu semne opuse. Deci media lor va fi 0 și, prin urmare, secvența de ieșire va fi identic nulă:

$$y[n]=0.$$

Așadar, circuitul analizat, furnizor al mediei mobile, este un circuit simplu.

Dar amintiți-vă, este ca setul Meccano, așa că putem lua piesele componente și putem schimba modul în care le combinăm.