

CURSUL 11

DESPRE PROIECTAREA FILTRELOR.
METODA APROXIMĂRII PRIN TRUNCHIERE.
METODA FERESTRELOR. FENOMENUL GIBBS.
METODA EȘANTIONĂRII ÎN FRECVENȚĂ.
EXEMPLE SIMPLE DE FILTRE :

- FILTRUL CU UN SINGUR POL *LEAKY INTEGRATOR*.
 - REZONATORUL DIGITAL.
- FILTRUL DE REECȚIE SIMPLU (*NOTCH*).
- FILTRUL DE REECȚIE ÎMBUNĂȚIT.

- FILTRUL DE REECȚIE AL ZGOMOTULUI REȚELEI DE ALIMENTARE (*HUM REMOVAL FILTER*).

SPECIFICAȚII TEHNICE PENTRU PROIECTARE.
ARGUMENTE ȘI CONTRA-ARGUMENTE ÎN ALEGEREA TIPULUI DE FILTRU.

1

Ne vom ocupa, în cele ce urmează, de proiectarea filtrelor, adică de determinarea unor parametri algoritmici ai acestora, folosindu-ne de specificațiile ingineresti obligatoriu de îndeplinit, dacă dorim să obținem un anumit tip de răspuns în frecvență.

Cerințele abstracte privind caracteristicile filtrului ne-au condus, până acum, la filtre ideale, iar aceste filtre evident că nu pot fi implementate în practică.

Vom abandona cerințele pur abstracte anterioare și vom introduce specificații țintă, cu anumite abateri (toleranțe).

În strategia de proiectare, pentru început vom încerca să imităm filtrele ideale, dar metoda își va arăta limitele, după cum vom vedea. Vom încerca, deci, să reproducem structura fie luând în considerare răspunsul la impuls, fie ținând cont de răspunsul în frecvență al filtrelor ideale studiate.

În prima parte, vom vedea trei metode fundamentale utilizate pentru a aproxima filtrele ideale: metoda trunchierii răspunsului la impuls, metoda ferestrei și metoda eșantionării în frecvență.

Deși limitate, aceste strategii reprezintă metode abordabile ce furnizează rezultate mulțumitoare pentru faza inițială a unui proiect, asta înainte de a trece la metode de proiectare mult mai sofisticate.

Vom trece după aceea la câteva tipuri de filtre, realizate cu scopuri bine definite, iar în final vom aborda în ansamblu problema proiectării filtrelor.

O idee de aproximare a unui filtru trece-jos ideal

O primă idee:

- alegem o frecvență de tăiere, ω_c .
- exprimăm analitic răspunsul ideal la impuls, $h[n]$, pentru filtrul trece – jos.
- trunchiem $h[n]$, trecând la un suport finit și obținând $\hat{h}[n]$.
- $\hat{h}[n]$, astfel obținut, definește filtrul FIR

2

După cum vă amintiți, un filtru ideal nu este realizabil în practică, deoarece răspunsul său la impuls este o secvență de suport infinit (și către minus infinit, și către plus infinit). Vom încerca să facem aproximațiile pornind de la răspunsul ideal la impuls, prin utilizarea, ca punct de plecare, a acestui răspuns.

În exemplele următoare, ne vom concentra asupra designului unui filtru trece-jos, dar aceleași tehnici pot fi aplicate oricărui tip de filtru ideal.

Prima idee, într-un astfel de caz, este de a parcurge următorii pași:

- Alegem o frecvență de tăiere, ω_c .
- Exprimăm analitic răspunsul ideal la impuls, $h[n]$, pentru filtrul trece – jos.
- Trunchiem $h[n]$, trecând la un suport finit (vizând astfel un filtru FIR) și obținând $\hat{h}[n]$.
- $\hat{h}[n]$, astfel obținut, definește filtrul FIR

Metoda aproximării prin trunchiere

Aproximarea filtrului trece-jos ideal cu ajutorul unui filtru FIR, având răspunsul la impuls de lungime $M = 2N+1$ și centrat în zero

$$\hat{h}[n] = \begin{cases} \frac{\omega_c}{\pi} \operatorname{sinc}\left(\frac{\omega_c}{\pi} n\right) & |n| \leq N \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

3

Acest $\hat{h}[n]$, obținut prin trunchierea modelului ideal, considerând un număr finit de puncte, ne definește filtrul FIR pe care îl vom putea folosi.

Deocamdată, nu ne facem griji cu privire la cauzalitate, așa că păstrăm simetria în jurul lui zero a răspunsului la impuls și aproximăm filtrul ideal cu un FIR de lungime $M = 2N + 1$, centrat în jurul zero.

Astfel, pentru $\hat{h}[n]$ se obține expresia analitică din slide. Formula este aceeași ca la $h[n]$, însă ea se utilizează pentru un număr finit de puncte!

Un argument important în favoarea metodei

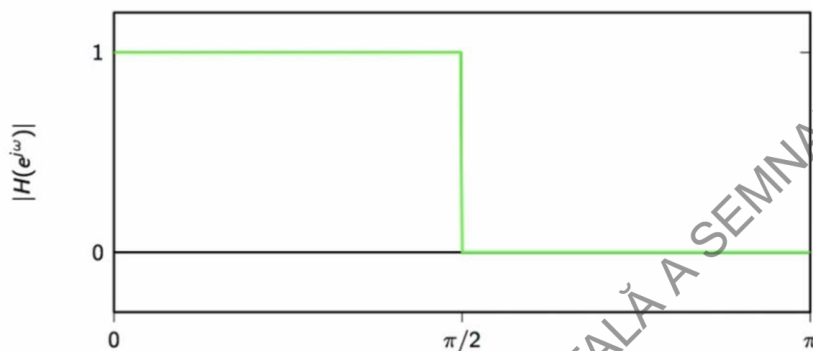
$$\begin{aligned}\text{MSE} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |H(e^{j\omega}) - \hat{H}(e^{j\omega})|^2 d\omega \\ &= \|H(e^{j\omega}) - \hat{H}(e^{j\omega})\|^2 \\ &= \|h[n] - \hat{h}[n]\|^2 \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n] - \hat{h}[n]|^2\end{aligned}$$

Eroarea pătratică medie (Mean Squared Error –MSE) este minimizată prin trunchierea simetrică a răspunsului ideal la impuls în jurul lui zero

4

Nu insistăm prea mult, însă o justificare importantă a utilizării acestei metode este aceea că dacă vom calcula eroarea pătratică medie (Mean Squared Error - MSE, care se exprimă prin formula generală din primul rând, iar după calcule se ajunge la ultima exprimare), aceasta este minimizată prin alegerea valorilor simetric în jurul lui zero. Pentru explicații este suficient să-i facem evaluarea cu ajutorul formulelor lui $h[n]$ și $\hat{h}[n]$ ca să ne dăm seama că așa stau lucrurile.

Dar și un contra-argument

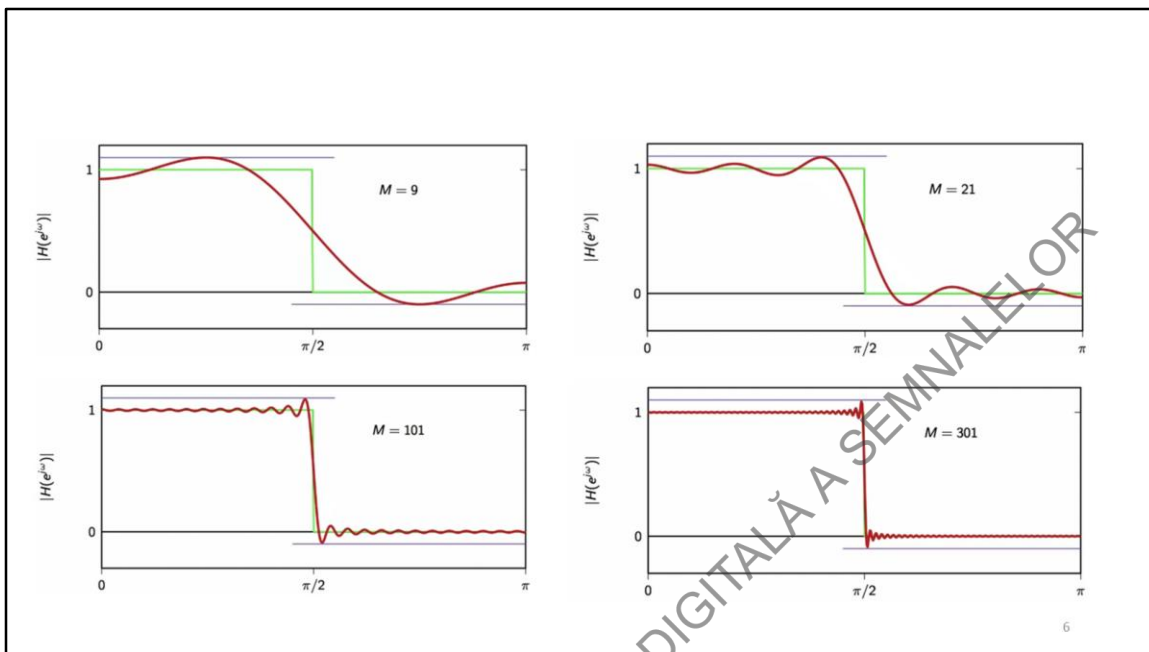


5

Am văzut, deci, de ce metoda aproximării prin trunchierea răspunsului la impuls al filtrului ar putea fi o idee bună, dar este timpul să vedem și dezavantajele. Pentru a vedea asta, haideți să analizăm răspunsul în frecvență al filtrului.

Aici vedem răspunsul în frecvență al unui filtru trece-jos ideal, având frecvența de tăiere $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.

Vom suprapune peste acesta răspunsul în frecvență obținut pentru aproximări determinate de valori diferite ale numărului de eșantioane $M=2N+1$ (luate în ordine crescătoare). Iată ce vom obține.



Începem cu cazul $M = 9$, care nu este cu adevărat un număr de puncte foarte mare, și vedem că aproximarea nu este una foarte bună. Vom crește, așadar, acest număr. Iată ce obținem pe măsură ce adăugăm mai multe puncte din răspunsul la impuls. Curba în roșu se apropie, încet, de cea în verde. Însă, eroarea maximă observată în zona frecvenței de tăiere ω_c nu scade, cu adevărat, în ciuda numărului crescător de puncte folosite pentru aproximare. Chiar și pentru 300 de puncte, eroarea maximă rămâne de aceeași amplitudine.

FENOMENUL GIBBS

Eroarea maximă în jurul frecvenței de tăiere este de aproximativ 9% din înălțimea pragului

7

Se poate demonstra matematic că eroarea maximă în jurul frecvenței de tăiere este de aproximativ 9% din înălțimea pragului, indiferent de numărul M de puncte considerat. Acesta este un rezultat standard în teoria aproximării, cunoscut sub numele de *fenomenul Gibbs*, iar fenomenul este specific în cazul aproximării funcțiilor discontinue (a se vedea discontinuitatea, din cazul analizat de noi, la frecvența de tăiere).

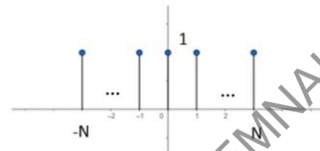
Metoda ferestrelor

$$\hat{h}[n] = h[n] w[n]$$

$$w[n] = \begin{cases} 1 & |n| \leq N \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = ?$$

$W(\text{indow}) = \text{fereastră}$



8

Pentru a înțelege, intuitiv, ce se întâmplă atunci când aproximăm un filtru prin trunchiere, putem să privim problema dintr-o altă perspectivă.

Putem considera filtrul ca fiind descris de răspunsul la impuls $\hat{h}[n]$, obținut prin produsul dintre răspunsul inițial la impuls, $h[n]$, și secvența-fereastră $w[n]$, care este o simplă succesiune de eșantioane de valoare 1, centrată în zero, cu suportul întinzându-se de la $-N$, la $+N$.

Cu această observație, întrebarea care se pune acum este: cum putem exprima transformata Fourier a acestui produs de secvențe discrete?

Răspunsul îl obținem dacă aplicăm așa numita teoremă a modulației.

TEOREMA CONVOLUȚIEI vs TEOREMA MODULAȚIEI

Teorema convoluției: $\text{DTFT} \{(x * y)[n]\} = X(e^{j\omega}) Y(e^{j\omega})$

Teorema modulației: $\text{DTFT} \{x[n] y[n]\} = (X * Y)(e^{j\omega})$

9

Teorema modulației este duala teoremei convoluției.

Vă amintiți că *teorema convoluției* spune că transformata Fourier a convoluției a două secvențe în timp discret este dată de produsul în domeniul de frecvență al transformatelor lor Fourier.

Teorema modulației ne dă un rezultat pentru transformata Fourier a produsului a două secvențe în timp discret și spune că transformata Fourier a acestuia este convoluția transformatelor lor Fourier în domeniul frecvență.

Convoluția transformatelor Fourier în domeniul frecvență

În $\mathbb{C}^\infty$:

$$\begin{aligned}(x * y)[n] &= \langle x^*[k], y[n - k] \rangle \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k]y[n - k]\end{aligned}$$

În $L_2([-\pi, \pi])$:

$$\begin{aligned}(X * Y)(e^{j\omega}) &= \langle X^*(e^{j\sigma}), Y(e^{j(\omega-\sigma)}) \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\sigma}) Y(e^{j(\omega-\sigma)}) d\sigma\end{aligned}$$

10

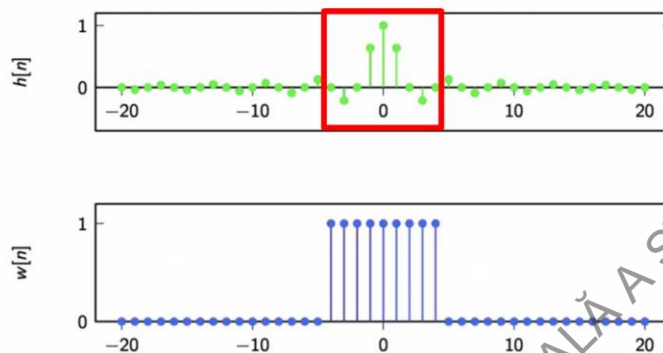
Dar ce este, oare, *convoluția în domeniul frecvență*, deoarece noi nu am definit-o până acum.

Ne amintim cum s-a definit convoluția în domeniul timp, între două secvențe discrete din $\mathbb{C}^\infty$, adică în spațiul semnalelor discrete de lungime infinită. Practic, este produsul scalar din slide. Luăm acest produs scalar ca model.

Putem adopta aceeași strategie și în $L_2([-\pi, \pi])$, care este spațiul transformatelor Fourier în timp discret (DTFT), și definim convoluția dintre două transformate Fourier ca fiind produsul scalar dintre prima transformată Fourier conjugată și cea de a doua transformată Fourier, cu frecvența inversată și întârziată cu ω .

Folosind această definiție, se poate demonstra fără mare dificultate teorema modulației. Nu insistăm asupra demonstrației, dar reținem rezultatul, acesta fiind unul important.

Înțelegerea fenomenului Gibbs: în domeniul timp



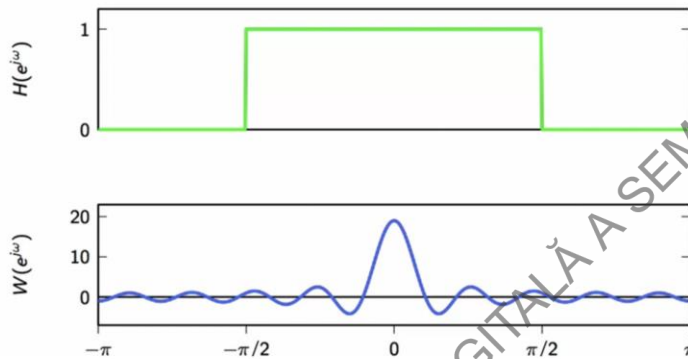
11

Dar acum ar trebui să ne întoarcem la motivul inițial, pentru care am și făcut aceste noi precizări, motiv care vizează înțelegerea fenomenului Gibbs.

Să ne amintim că am exprimat $\hat{h}[n] = h[n]w[n]$ și să figurăm cele două secvențe, ce sunt factori ai produsului. Prin efectuarea produsului vor rămâne numai acele eșantioane din $h[n]$ care corespund suportului simetric față de zero al lui $w[n]$ (adică eșantioanele marcate în dreptunghiul-fereastră colorat în roșu). Toate celelalte eșantioane ale lui $\hat{h}[n]$, spre minus infinit și plus infinit, vor fi zero.

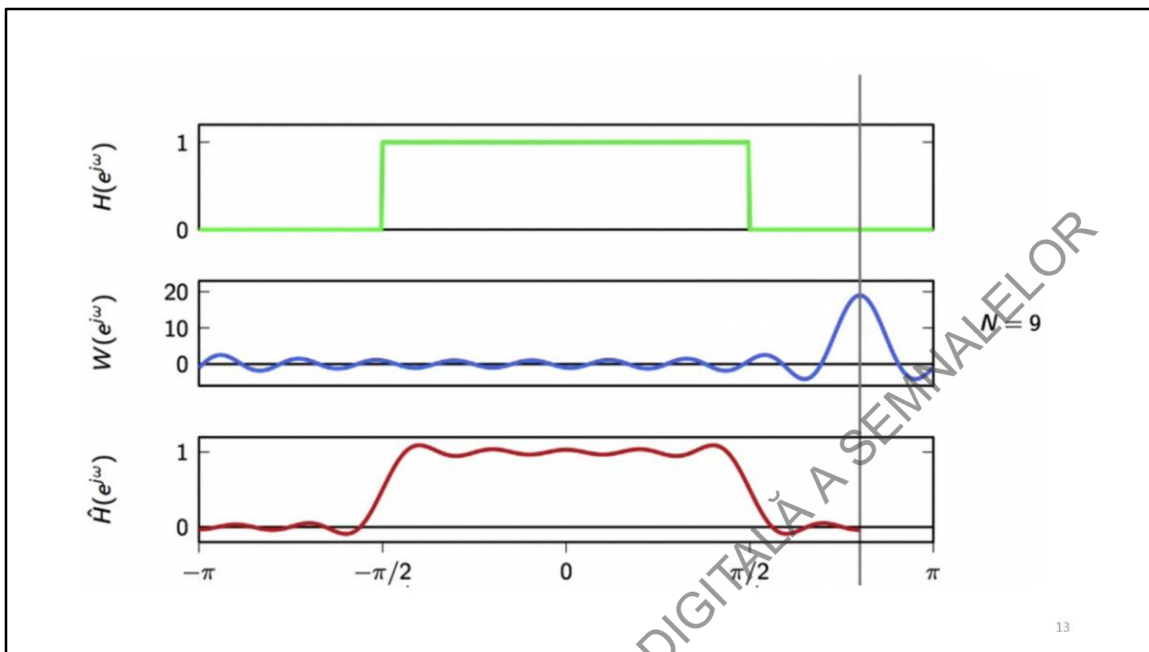
Înțelegerea fenomenului Gibbs: în domeniul frecvență

$$\hat{H}(e^{j\omega}) = (H * W)(e^{j\omega}), \quad W(e^{j\omega}) = \sin(\omega(2N + 1)/2) / \sin(\omega/2)$$



12

În domeniul frecvență, transformata Fourier a lui $\hat{h}[n]=h[n]w[n]$, notată $\hat{H}(e^{j\omega})$, se obține, conform teoremei modulației, prin convoluția dintre transformata Fourier a lui $h[n]$, adică $H(e^{j\omega})$, figurată în primul grafic, și transformata Fourier a lui $w[n]$, notată cu $W(e^{j\omega})$ și figurată în al doilea grafic: $\hat{H}(e^{j\omega})=(H * W)(e^{j\omega})$.



Să figurăm acum rezultatul $\hat{H}(e^{j\omega})$ care se obține prin efectuarea operației de convoluție dintre cele două transformate (respectiv integrala produsului din definiție).

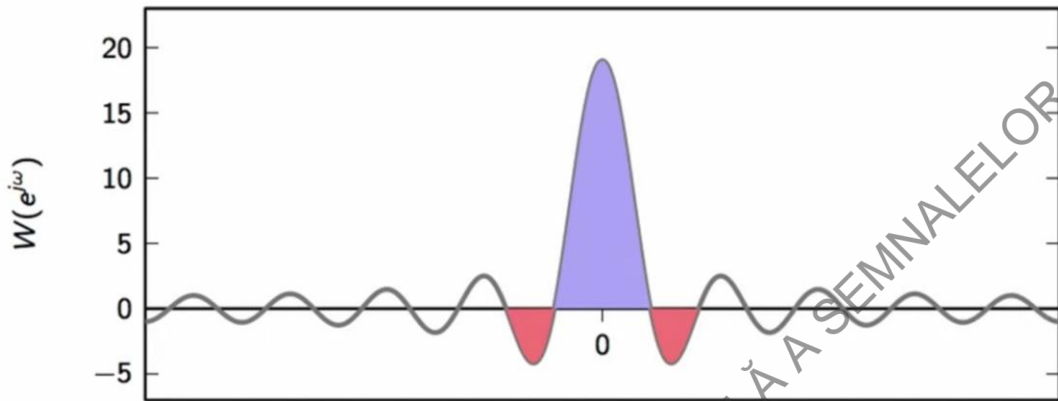
Pentru partea de început a operației, remarcăm în rezultatul grafic existența unui comportament oscilatoriu de amplitudine mică.

Lucrurile încep să devină interesante de abia atunci când lobul principal al transformatei Fourier $W(e^{j\omega})$ începe să se suprapună cu suportul dreptunghiular al filtrului ideal $H(e^{j\omega})$. Pe măsură ce ne apropiem de banda de tranziție a filtrului, vedem că valoarea convoluției începe să crească, și de fapt, crește cel mai mult exact acolo unde lobul principal al transformatei Fourier a ferestrei a intrat total sub partea dreptunghiulară.

Pe măsură ce mergem mai departe, undulațiile care urmăresc lobul principal încep să se mai micșoreze, dar comportamentul se va repeta identic și la cealaltă tranziție, apărând o nouă creștere, de această dată la ieșirea lobului principal de sub partea dreptunghiulară.

După aceea undulațiile vor fi iar de amplitudine mică, iar rezultatul convoluției este cel figurat.

Lobul principal și lobii laterali – semnificații



14

Forma Transformatei Fourier $\hat{H}(e^{j\omega})$ a filtrului va depinde de forma transformatei Fourier $W(e^{j\omega})$.

Ceea ce se numește lobul principal, colorat în albastru, va determina cât de abrupt se fac tranzițiile între banda de oprire și banda de trecere. Cu cât acest lob este mai îngust, cu atât tranziția se face mai abrupt și este mai bruscă.

Amplitudinea așa-numiților lobi laterali, colorați în roșu, va determina amplitudinea erorii, de ambele părți ale benzii de tranziție, iar aceasta este ceea ce determină fenomenul Gibbs.

Cum să facem alegerile, pentru a obține o eficiență maximă a filtrului?

Ce ne dorim?

- Lobul principal cât mai îngust, pentru ca tranziția să se facă cât mai abrupt
- Lobii secundari cât mai mici, pentru ca eroarea datorată fenomenului Gibbs să fie cât mai mică
- O fereastră dreptunghiulară cât mai îngustă, pentru ca filtrul să fie cât mai eficient

Toate aceste cerințe sunt, însă, contradictorii!

15

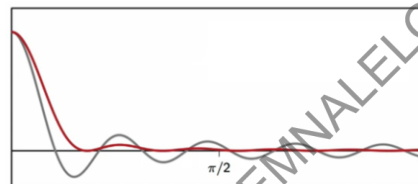
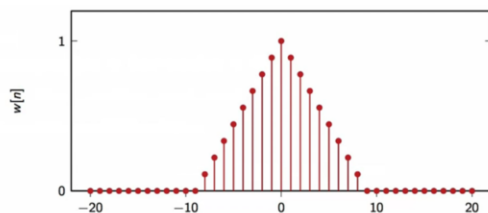
În ceea ce privește cerințele noastre, ne-am dori să avem un lob principal foarte îngust, astfel încât tranziția să fie cât mai bruscă.

În același timp, ne-am dori să avem lobii laterali foarte mici, astfel încât eroarea Gibbs să fie menținută la un nivel scăzut.

Și, nu în ultimul rând, ne-am dori să avem o fereastră dreptunghiulară cât mai scurtă, cât mai îngustă, astfel încât FIR-ul să fie cât mai eficient.

Toate acestea sunt cerințe foarte, foarte contradictorii.

FEREASTRĂ DREPTUNGHIIULARĂ vs FEREASTRĂ TRIUNGHIIULARĂ



16

Haideți să justificăm.

Există o întreagă literatură care se ocupă de dezvoltarea celei mai bune ferestre posibile pentru a aproxima un filtru ideal.

De exemplu, noi am folosit o *ferastră dreptunghiulară* pentru a trunchia răspunsul la impuls, dar dacă folosim o *ferastră triunghiulară* lucrurile se schimbă. Pe al doilea grafic se poate face o comparație între cele două situații, în cazul ferestrei dreptunghiulare (culoare gri) și în cazul celei triunghiulare (culoare roșie), pentru un $N=19$. Lobii laterali sunt mult mai mici pentru fereastra triunghiulară, dar lățimea lobului principal este mai mare.

Ceea ce obținem este că vom putea atenua mai bine eroarea Gibbs, dar prețul plătit este cel al unei tranziții mai puțin abrupte.

Metoda eșantionării în frecvență

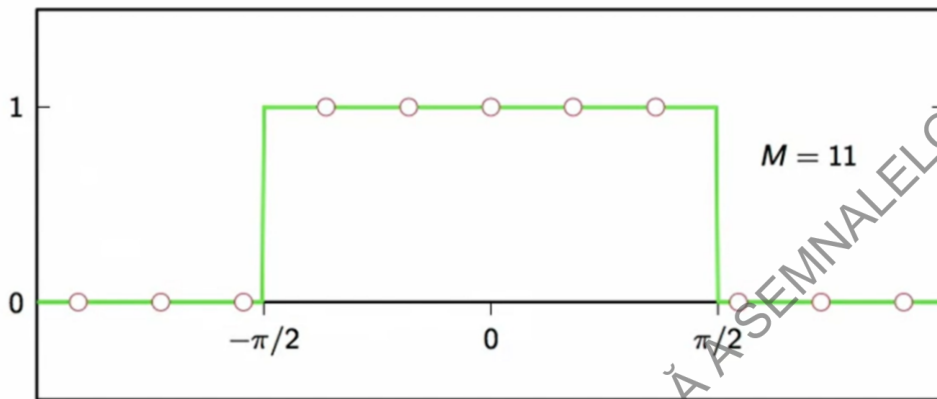
Descriem ideea care stă la baza metodei:

- Reprezentăm în domeniul frecvență răspunsul filtrului dorit de noi: $H(e^{j\omega})$
- Eșantionăm acest răspuns în frecvență la intervale regulate, luând M valori pentru frecvențele $\omega_k = \frac{2\pi}{M}k$, cu $k = 0, 1, \dots, (M-1)$
- Calculăm IDFT-ul pentru fiecare dintre aceste M valori
- Folosim cele M rezultate obținute pentru a construi, în domeniul timp, răspunsul la impuls al filtrului dorit: $\hat{h}[n]$.

17

Trecem acum la o nouă metodă de aproximare a unui filtru ideal, numită *metoda eșantionării în frecvență*. Ideea acesteia este de a parcurge următorii pași, descriși în slide.

Eșantionarea în frecvență

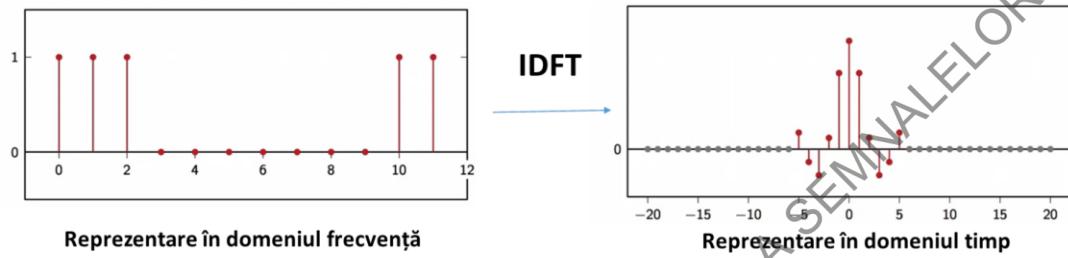


18

Să luăm un exemplu. Începem cu clasicul exemplu al filtrului ideal trece-jos având frecvența de tăiere $\omega_c = \frac{\pi}{2}$.

Alegem $M = 11$ și luăm 11 eșantioane echidistante, pe această reprezentare în frecvență, între $-\pi$ și π .

Eșantioanele DFT



19

Rearanjăm eșantioanele, conform notațiilor DFT, iar apoi calculăm DFT inversă (adică IDFT) folosind un algoritm numeric.

Dacă facem asta, obținem răspunsul la impuls din figură. Acesta este un răspuns la impuls în 11 puncte, obținut pe computer, folosind inversa DFT pentru eșantioanele prelevate din caracteristica ideală în frecvență.

Dezavantajele metodei

- Răspunsul în frecvență este DTFT-ul de suport finit, al cărui DFT îl știm
- Răspunsul în frecvență va fi obținut prin interpolarea eșantioanelor în frecvență
- Interpolatorul este transformarea ce corespunde la fereastra dreptunghiulară în N puncte
- Nu avem control asupra lobului principal și lobilor secundari ai interpolatorului

20

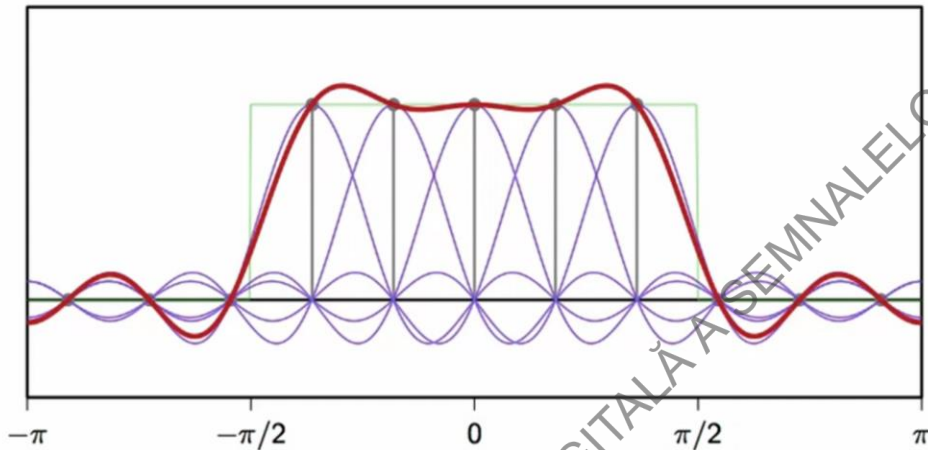
Răspunsul în frecvență este de fapt DTFT-ul de suport finit, căruia noi îi știm DFT-ul. Putem face conversia, deoarece cunoaștem relațiile de legătură dintre transformări.

Răspunsul în frecvență va fi obținut prin interpolarea în frecvență făcută asupra eșantioanelor în frecvență pe care le-am luat la primul pas.

Interpolatorul este transformarea ce corespunde la fereastra dreptunghiulară din N puncte.

Deci nu scăpăm cu adevărat de acea funcție și, din această cauză, nu vom avea niciun control asupra lobului principal și lobilor laterali ai interpolatorului.

Răspunsul în frecvență obținut după interpolare



Grafic, lucrurile arată ca în figură. Iată DTFT-ul original cu culoarea verde. Cu culoarea gri avem eșantioanele în frecvență.

Rezultatul DTFT va fi obținut prin interpolarea acestor eșantioane din domeniul frecvență, folosind acest interpolator, colorat în figură cu albastru.

Când facem interpolarea, iată ce obținem în cele din urmă.

Din nou, avem un filtru care va furniza o eroare la tranziția dintr-o bandă în alta, eroare pe care nu o vom putea controla.

Exemple simple de filtre

- Multe probleme de prelucrare a semnalelor pot fi rezolvate utilizându-se filtre simple
- Am analizat, deja, astfel de filtre (filtrul cu mediere mobilă, filtrul *leaky integrator*)
- Funcțiile de transfer simple (de ordin redus) permit o proiectare intuitivă, dar și anumite adaptări, funcție de nevoi

22

Pe scurt, toate aceste metode de aproximare a filtrelor ideale, prezentate anterior, sunt cu siguranță foarte utile atunci când dorim să obținem un prototip rapid și banal, și nu avem timp să folosim metode mai sofisticate de proiectare a filtrelor. Deci, acestea sunt metode utile, dar cu siguranță nu sunt optime și lasă de dorit în ceea ce privește controlul fin pe care îl putem avea asupra erorii.

În continuare vom vorbi despre modul în care putem să proiectăm un filtru bazându-ne numai pe funcția de transfer. Vom evidenția câteva filtre IIR simple, ale căror proprietăți pot fi manipulate cu ușurință, doar pe baza poziției polilor și a zerourilor din funcția de transfer asociată.

Multe probleme de procesare a semnalului pot fi rezolvate folosind filtre foarte simple. Așadar este important să stăpânim structurile de bază. Am văzut, deja, exemple concrete, cum ar fi filtrul *leaky integrator* și filtrul cu mediere mobilă.

În general, atunci când folosim secțiuni de ordin redus (număr redus de blocuri de întârziere), putem înțelege intuitiv ceea ce se întâmplă în domeniul frecvenței doar privind reprezentarea grafică poli-zerouri.

Filtre simple trece-jos

- Lasă să treacă numai frecvențele joase
- Sunt folosite pentru eliminarea componentelor de frecvență ridicată (cum sunt anumite zgomote)
- Sunt utile în comunicații, audio și în cadrul sistemelor de control
- Un exemplu la îndemână: *leaky integrator*

23

Luăm în considerare problema proiectării unui filtru trece-jos simplu. Așadar, ne dorim ca acesta să lase să treacă frecvențele joase.

Vrem să eliminăm frecvențele înalte.

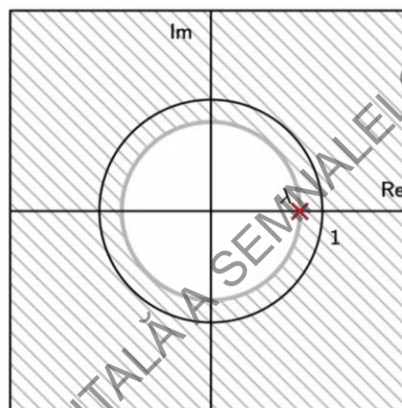
Folosim un astfel de filtru în domeniul audio, în ingineria comunicațiilor sau în sistemele de control.

Am văzut până acum un astfel de exemplu, foarte simplu, de filtru trece-jos, respectiv filtrul *leaky integrator*.

Filtrul *leaky integrator* (filtrul cu un singur pol)

$$H(z) = \frac{(1 - \lambda)}{1 - \lambda z^{-1}}$$

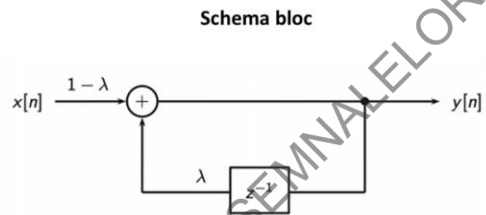
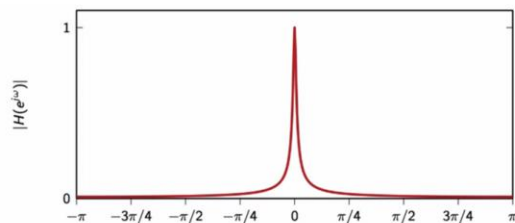
$$y[n] = (1 - \lambda)x[n] + \lambda y[n - 1]$$



24

De acum aproape că-i știm funcția de transfer pe de rost. Acesta este prima din slide, iar ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți corespunzătoare filtrului este următoarea formulă din slide. Putem trasa polii și zerourile filtrului în planul complex și descoperim că există un singur pol în λ . Atunci când $\lambda < 1$ avem asigurată stabilitatea filtrului.

Răspunsul în frecvență și structura filtrului *leaky integrator*



25

În domeniul frecvență, răspunsul în frecvență arată ca în figură. El devine tot mai concentrat în jurul originii pe măsură ce λ se apropie de valoarea 1. Schema bloc a filtrului are o buclă simplă de feedback cu o întârziere unitară ce redirectionează ieșirea în intrare.

Rezonatorul digital

- Este un filtru cu banda de trecere îngustă
- Este utilizat pentru detectarea prezenței unei componente sinusoidale de frecvență fixată
- Util în sistemele de comunicații și în telefonie
- Ideea pe care se bazează: deplasarea benzii de trecere a unui *Leaky integrator*

26

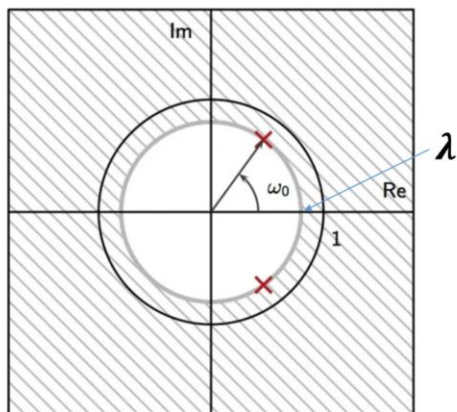
Acum că știm cum să proiectăm un filtru *leaky integrator*, putem adapta designul pentru a obține așa-numitul *rezonator digital*.

Un rezonator este un filtru cu o bandă de trecere îngustă, care este cel mai adesea folosit să detecteze prezența unei sinusoide de o frecvență dată.

Un circuit clasic care folosește astfel de rezonatoare este un detector de semnale DTMF (Dual-Tone-Multi-Frequency), utilizat în telecomunicații.

Ideea este să obținem acest rezonator digital prin deplasarea benzii de trecere a filtrului *leaky integrator* pe care îl considerăm baza de pornire. Vedem imediat ce înseamnă acest lucru.

Rezonatorul digital (filtrul cu doi poli, complex conjugați)



$$H(z) = \frac{G_0}{(1 - pz^{-1})(1 - p^*z^{-1})}$$

$$p = \lambda e^{j\omega_0}$$

$$y[n] = G_0 x[n] - a_1 y[n-1] - a_2 y[n-2]$$

27

Știm că *leaky integrator* are un pol în λ , figurat pe axa reală, iar ideea construcției noului filtru este de a muta radial polul, pe circumferința cercului de rază λ , pentru a deplasa banda de trecere spre frecvența pe care ne interesează să o selectăm, ω_0 .

Deoarece vrem un filtru real, trebuie să creăm și un pol complex conjugat, la un unghi egal cu $(-\omega_0)$.

Funcția de transfer $H(z)$ a sistemului este de forma dată în slide. Apare aici, la numărător, un factor de câștig G_0 , pe care îl vom determina mai târziu, iar la numitor produsul monoamelor care corespund celor doi poli din planul complex.

În ceea ce privește polii, îi putem exprima convenabil sub forma polară, $p = \lambda e^{j\omega_0}$ și conjugatul $p^* = \lambda e^{-j\omega_0}$, unde ω_0 este frecvența pe care vrem să o selectăm.

În domeniul timp, ieșirea $y[n]$ este dată de formula din slide. Imediat vom determina și coeficienții care apar aici, folosind produsul monoamelor de la numitorul lui $H(z)$.

Determinarea coeficienților din ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți

$$\begin{aligned} H(z) &= \frac{G_0}{(1 - pz^{-1})(1 - p^*z^{-1})}, \quad p = \lambda e^{j\omega_0} \\ &= \frac{G_0}{1 - 2\Re\{p\}z^{-1} + |p|^2z^{-2}} \\ &= \frac{G_0}{1 - 2\lambda \cos \omega_0 z^{-1} + |\lambda|^2 z^{-2}} \end{aligned}$$

$$a_1 = -2\lambda \cos \omega_0, \quad a_2 = |\lambda|^2$$

$$\Rightarrow y[n] = G_0 x[n] + 2\lambda \cos \omega_0 z^{-1} y[n-1] - |\lambda|^2 z^{-2}$$

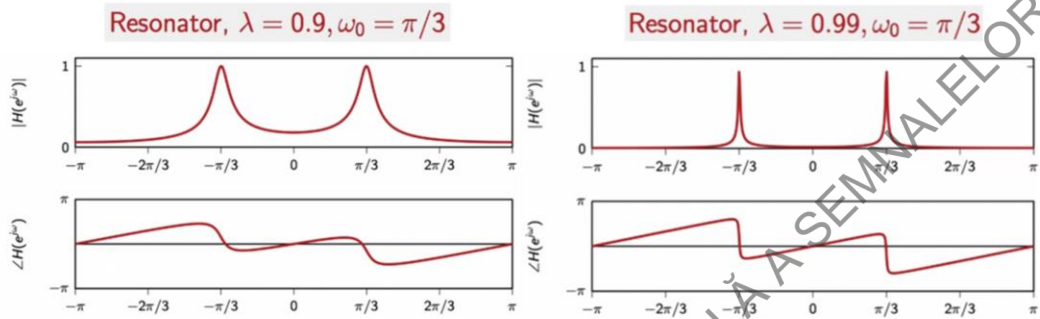
28

Determinarea se face imediat, fără dificultate: $a_1 = -2\lambda \cos \omega_0$, $a_2 = |\lambda|^2$

Așadar:

$$y[n] = G_0 x[n] + 2\lambda \cos \omega_0 z^{-1} y[n-1] - |\lambda|^2 z^{-2}$$

Răspunsul în frecvență



29

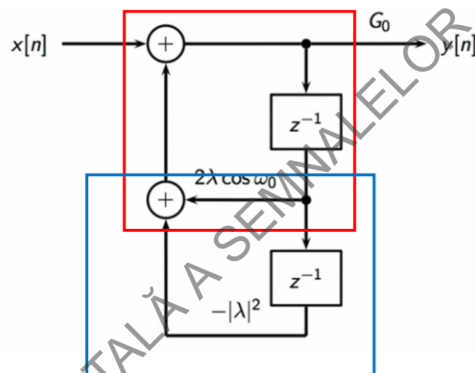
În domeniul frecvență, rezonatorul digital se comportă cum ne așteptam. Avem două vârfuri, la răspunsul în frecvență (centrarea pe frecvența $\omega_0 = \pi/3$). Faza este din nou neliniară, însă modificată față de *leaky integrator*.

Problema cu acest rezonator este că el nu e foarte selectiv, deoarece benzile de trecere sunt destul de dispersate, după cum se poate vedea. Putem îmbunătăți selectivitatea rezonatorului alegând o valoare pentru λ cât mai aproape de 1.

Dacă alegem $\lambda = 0.99$, pentru aceeași frecvență $\omega_0 = \pi/3$ vom obține cele două vârfuri, centrate în jurul frecvenței de interes, mult mai înguste.

Structura filtrului (schema bloc a rezonatorului digital)

$$y[n] = G_0 x[n] + 2\lambda \cos \omega_0 \cdot y[n-1] - |\lambda|^2 \cdot y[n-2]$$



30

În ceea ce privește structura filtrului, de data aceasta vom avea două întârzieri. Reproducerea ecuației cu ajutorul structurii figurate este evidentă. Să urmărim.

Filtrul de rejecție simplu (notch)

notch = creștătură, tăietură

- Un filtru de rejecție, în general, este un filtru pentru care funcția de transfer conține unul sau mai multe zerouri pe cercul unitate.
- Filtrul de rejecție simplu îl are ca zero doar pe $1 = e^{j0}$.
- Cu ajutorul filtrului de rejecție simplu eliminăm componente de frecvență $\omega = 0$.

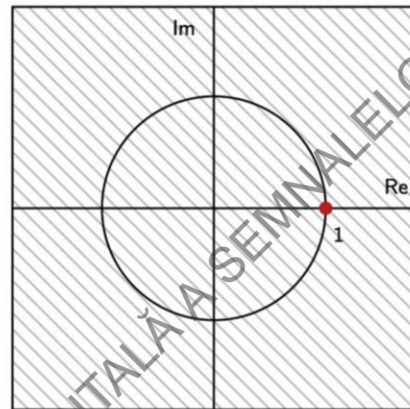
31

Filtrele de rejecție se folosesc în aplicații în care componentele de anumite frecvențe trebuie eliminate. În aceste condiții, un filtru de rejecție, în general, va fi un filtru pentru care funcția de transfer are doar zerouri, unul sau mai multe, toate pe cercul unitate. Un filtru de rejecție simplu îl are ca zero numai pe 1, care corespunde frecvenței $\omega = 0$. El va elimina, prin urmare, componentele de frecvență nulă.

Filtrul de rejectie simplu (un zero)

$$H(z) = 1 - z^{-1}$$

$$y[n] = x[n] - x[n-1]$$

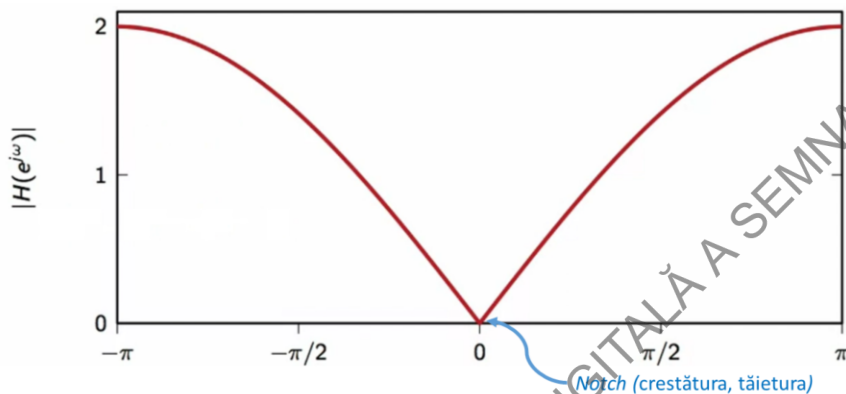


32

Avem, deci, un zero în $z = 1 = e^{j0}$, care este punctul din planul complex căruia îi corespunde frecvența 0.

Funcția de transfer este imediată. Și ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți se scrie foarte simplu, ieșirea calculându-se ca diferența dintre valoarea intrării curente și cea a intrării anterioare: $x[n] - x[n-1]$.

Răspunsul în frecvență (filtrul de rejectie simplu)



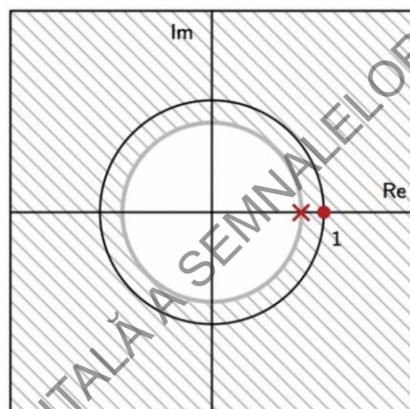
33

Dacă trasăm răspunsul în frecvență, aceasta va fi caracteristica pe care o obținem. Întrădevăr, pentru frecvență 0 se obține valoare 0, așa cum ne doream. Aceasta, însă, nu este o caracteristică acceptabilă pentru noi, deoarece introduce o atenuare foarte mare pe o bună parte din domeniul de frecvență. Ceea ce ne dorim cu adevărat este o crestătură mult mai pronunțată. Trebuie să rămână valoarea 0 la frecvență 0, iar restul spectrului e de dorit să fie cât mai puțin afectat.

Filtrul de rejecție îmbunătățit (un zero, un pol)

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{1 - \lambda z^{-1}}$$

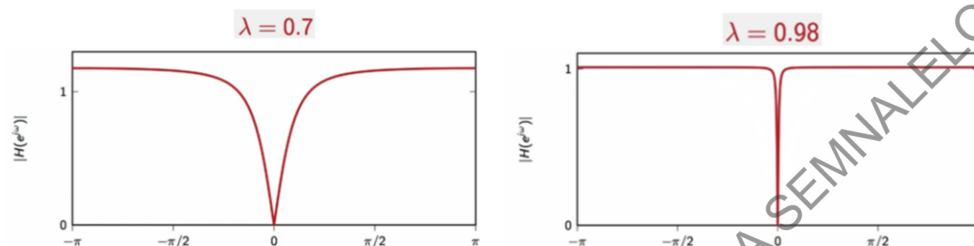
$$y[n] = \lambda y[n-1] + x[n] - x[n-1]$$



34

Pentru a îmbunătăți performanțele filtrului de rejecție, vom forța apariția unui pol de valoare λ în apropierea zeroului $z=1$. Evident, polul trebuie să fie în interiorul cercului de rază unitară, adică să fie de valoare λ mai mică decât 1, fiindu-ne astfel asigurată stabilitatea filtrului. Funcția de transfer este imediată, numărătorul asigurându-ne zeroul $z=1$ și numitorul asigurându-ne polul de valoare λ . Ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți se deduce și ea cu rapiditate.

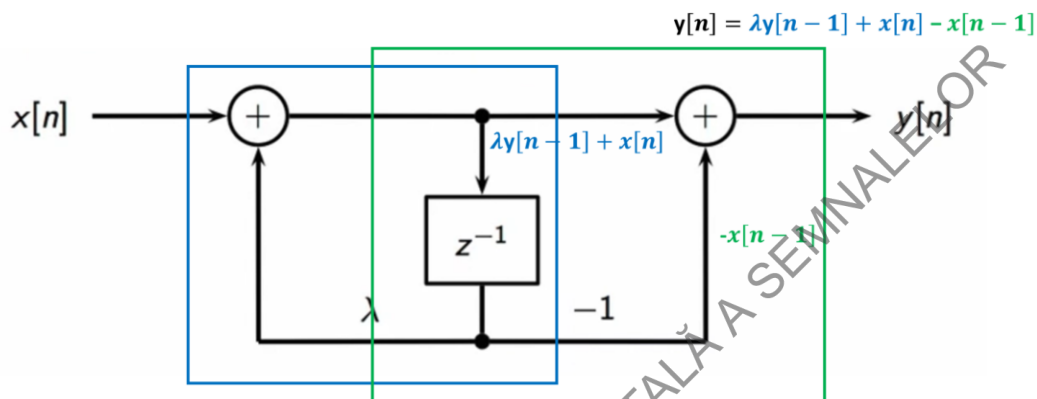
Răspunsul în frecvență (filtrul de rejecție îmbunătățit)



35

Dacă facem reprezentarea în domeniul frecvență, aceasta va fi funcție de valorile lui λ . Pe măsură ce λ crește, creștătura devine tot mai pronunțată.

Structura filtrului (schema bloc a filtrului de rejecție îmbunătățit)



36

Aceasta este structura filtrului. Nu este una complicată, dar pentru a înțelege cum funcționează vom gândi lucrurile prin suprapunerea efectelor (de fapt, exploatăm liniaritatea sistemului)!

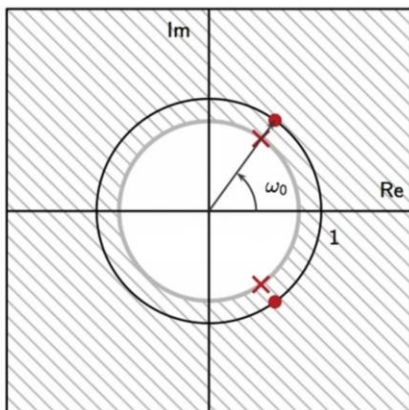
Filtru de rejecție a zgomotului rețelei de alimentare (*Hum removal filter*)

- **Hum** = zgomot (bâzâit, zumzet) având frecvența aproximativ egală cu **dublul frecvenței rețelei** de alimentare cu energie electrică. Poate să fie foarte deranjant pentru urechea umană, fiind în gama de frecvențe audibile.
- Filtrul este similar, oarecum, cu filtrul de rejecție simplu, dar el se utilizează pentru a elimina o frecvență nenulă specifică (și nu frecvența 0, ca în cazul respectivului filtru).
- Este foarte util muzicienilor, aflați în căutarea sunetelor perfecte (exemplu: amplificatoarele pentru chitarele electrice culeg acest zgomot din rețeaua de alimentare cu energie electrică).
- Înlăturarea zgomotului se face ținând cont de frecvența rețelei de alimentare.

37

Trecem la o altă structură de filtru, dedicată altor nevoi. Parcurgem informațiile din slide.

Funcția de transfer și RC-ul filtrului



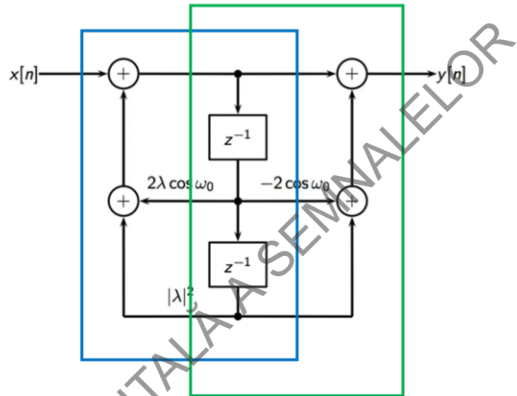
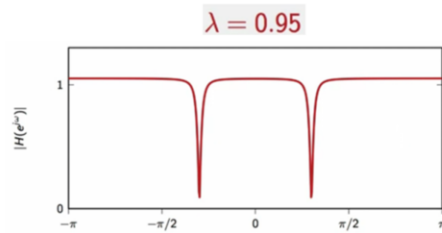
$$H(z) = \frac{(1 - e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - e^{-j\omega_0} z^{-1})}{(1 - \lambda e^{j\omega_0} z^{-1})(1 - \lambda e^{-j\omega_0} z^{-1})}$$

38

Strategia folosită va fi exact aceeași ca în cazul rezonatorului. Se ia filtrul de rejecție îmbunătățit, având un zero în $z=1$ și un pol în λ , în imediata apropiere a zeroului. Mișcăm apoi atât zeroul, cât și polul, cu ω_0 , pe circumferințele cercurilor corespunzătoare, de raze 1 și, respectiv, λ . Desigur, pentru a avea un filtru real, trebuie să introducem și complex conjugatele, corespunzătoare lui $-\omega_0$.

Vom obține o funcție de transfer de tipul celei din slide.

Structura filtrului (schema bloc) și răspunsul în frecvență



39

Dacă trasăm răspunsul în frecvență, obținem caracteristica dorită, cu creștătura corespunzătoare frecvenței de interes.
Structura filtrului este cea din figură.

PROBLEMA PROIECTĂRII FILTRELOR

Cerințe:

- Răspuns în frecvență: bandă (benzi) de trecere și de oprire
- Fază: liniaritate, deplasare
- Limitări impuse de resursele disponibile: capacitate și precizie de calcul

Trebuie determinate:

N , M și coeficienții a_k, b_k , pentru a se îndeplini cerințele impuse

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_{M-1} z^{-(M-1)}}{a_0 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{N-1} z^{-(N-1)}}$$

40

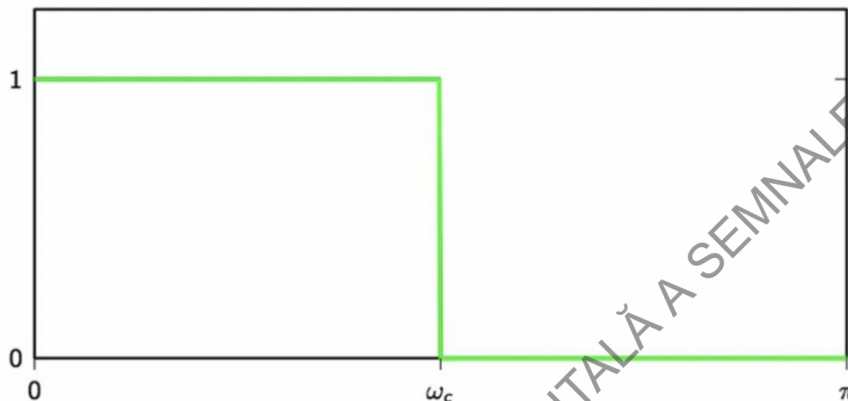
Până acum am obținut câteva filtre simple, derivate din structuri cunoscute, bazându-ne mai mult pe intuiție. În general, dacă structura filtrului nu este una foarte complicată, în sensul că funcția sa de transfer este simplă, cu grad mic pentru numitor și numărător, putem să deducem caracteristicile filtrului din diagrama poli-zero-uri. Mai mult, pentru a obține un filtru real cu caracteristici îmbunătățite, polii și zero-urile trebuie adăugate în perechi conjugate complexe. Deci, să reluăm problema proiectării, a designului filtrului.

În general, pornim de la un set de cerințe, cum ar fi caracteristicile răspunsului în frecvență, referindu-ne aici la plasarea benzii de trecere, respectiv a celei de oprire. Evident, putem avea mai multe benzi de trecere și mai multe benzi de oprire.

Probabil că vor exista și anumite cerințe de fază, puse sub forma dacă faza liniară este necesară sau nu.

Cel mai adesea vom avea, însă, o anumită limită a resurselor de calcul pe care le putem utiliza. Ea se va reflecta în capacitatea de a determina gradul numărătorului și al numitorului, precum și coeficienții polinoamelor implicate pentru a se îndeplini cât mai bine cerințele.

Exemplu: specificații pentru filtrul trece-jos



41

De exemplu, dacă vrem să proiectăm un filtru trece-jos specificațiile pot fi de tipul:

- o frecvență de tăiere
- o valoare dorită pentru banda de trecere
- o valoare dorită pentru banda de oprire.

Toate aceste specificații imediate par să indice o caracteristică ideală, despre care știm bine că nu o putem obține în practică.

Prin urmare, vom încerca să îndeplinim aceste cerințe luând în mod explicit în considerare ceea ce știm că este posibil de îndeplinit cu un filtru realizabil.

Limitări de ordin practic

- Tranzițiile între benzile de trecere și cele de oprire nu pot fi perfect abrupte, motiv pentru care se utilizează **benzi de tranziție**
- Amplitudinea răspunsului în frecvență nu poate rămâne constantă de-a lungul unui interval, ceea ce necesită **specificarea abaterilor/ toleranțelor pentru o anumită bandă**

42

Știm, de exemplu, că benzile de trecere și cele de oprire nu pot fi perfect abrupte. Prin urmare, vom folosi benzi de tranziție, pentru a permite o scădere treptată a răspunsului în frecvență, de la banda de trecere la banda de oprire. De asemenea, amplitudinea răspunsului în frecvență nu poate fi constantă de-a lungul unui întreg interval. Vom vedea, în scurt timp, de ce. Reținem că este necesară specificarea abaterilor / toleranțelor pentru o anumită bandă, de trecere sau de oprire.

Consecințele limitărilor impuse

În general:

- Benzile de tranziție mai mici implică filtre de *ordin* mai mare
- Erorile/abaterile mai mici implică, de asemenea, filtre de *ordin* mai mare

Asta în condițiile în care un filtru de *ordin* mai mare duce la cheltuieli mai mari, dar și la o mai mare întârziere.

Ordin al unui filtru = număr maxim de blocuri de întârziere utilizate în structura sa

43

În general, sunt de reținut următoarele:

Dacă vrem benzi de tranziție foarte scurte, va trebui să folosim filtre de ordin mare.

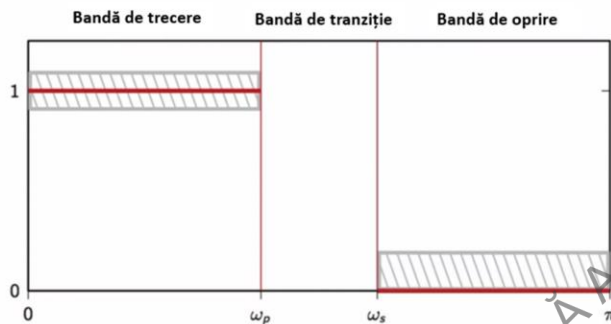
Similar, dacă dorim abateri / toleranțe mici, avem nevoie de filtre de ordin mare.

Prin *ordin al unui filtru* înțelegem, în general, numărul maxim de elemente de întârziere utilizate în structura acestuia. Acesta se deduce imediat, spre exemplu, din ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți, dar și din considerente constructive de design, ce pot reduce acest număr, așa cum vom vedea.

Acum, un ordin mai mare înseamnă un grad mai ridicat al polinomului de la numărător și/sau de la numitorul funcției de transfer.

Putem vedea creșterea ordinului filtrului în strânsă sa legătură cu necesitatea memorării și operării cu un număr în creștere de eșantioane anterioare (trecute) ale intrării și/sau ieșirii. Aceasta înseamnă că va trebui să folosim mai multă putere de calcul pentru implementarea filtrului, dar și că întârzierea introdusă de filtrul cauzal implementat va fi mai mare.

Specificații realiste pentru filtrul trece-jos



44

Putem reprezenta grafic specificațiile realiste ale filtrului trece-jos, puse în evidență, după cum urmează.

În loc să avem o frecvență de tăiere, ω_c (**cut**), vom avea o bandă de tranziție cuprinsă între o frecvență ω_p (**pass**), care ne specifică sfârșitul benzii de trecere, și o frecvență ω_s (**stop**), care ne specifică începutul benzii de oprire.

În loc să avem doar o valoare pentru banda de oprire (0) și banda de trecere (1), vom avea regiuni de abatere / toleranță, în care răspunsul în frecvență se poate mișca.

De ce nu putem avea un răspuns constant în frecvență?

$$H(z) = B(z)/A(z), \quad \text{cu } A(z) \text{ și } B(z) \text{ polinoame}$$

$$\begin{aligned} H(e^{j\omega}) = c \quad \text{pe un interval} &\Rightarrow B(z) - cA(z) = 0 \quad \text{pe un interval} \\ &\quad \text{(adică o ecuație cu un număr infinit de rădăcini)} \\ &\Rightarrow B(z) - cA(z) = 0 \quad \text{pentru toate valorile lui } z \\ &\Rightarrow H(e^{j\omega}) = c \quad \text{tot intervalul } [-\pi, \pi] \end{aligned}$$

45

Să încercăm să răspundem la întrebarea din slide, așa cum am promis mai înainte.

Pornim de la o funcție de transfer rațională (raport de polinoame) și **presupunem** că răspunsul în frecvență este constant pentru un întreg interval, indiferent cât de mic este acel interval.

În acest caz, funcția de transfer va fi constantă pe acel interval.

Prin urmare, deducem o primă relație care se traduce prin aceea că ecuația are un număr infinit de rădăcini pe acel interval (o infinitate de valori pentru care expresia se anulează, intervalul conținând o infinitate de puncte).

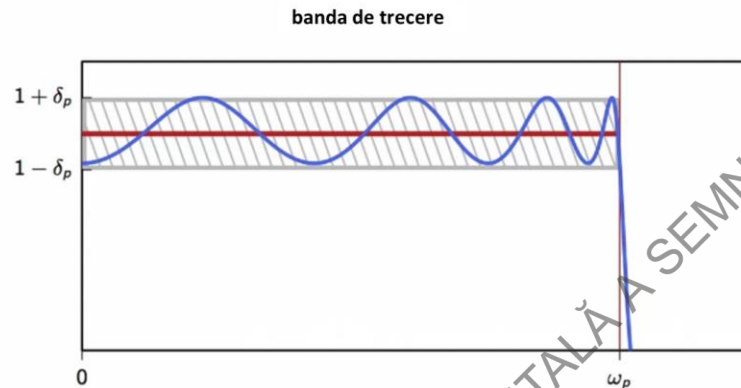
Dar știm, din *teorema fundamentală a algebrei*, că dacă un polinom are un număr infinit de rădăcini, atunci el este identic cu 0 în tot domeniul complex.

Ceea ce înseamnă că dacă transformata Fourier este constantă pe un interval, indiferent cât de mic intervalul, ea va fi constantă pe întregul interval de frecvență $[-\pi, \pi]$. Am ajuns la o **contradicție**, deoarece în acest mod funcția ar lua aceeași valoare în benzile de trecere și de oprire!

Răspunsul în frecvență al unui filtru este precum un păstrăv, în apele de munte. Trebuie să se miște continuu și nu poate fi niciodată în repaus.

Caz important:

aceeași amplitudine a undulațiilor în banda de trecere
(*equiripple error*)



46

Un caz important este ceea ce numim *eroarea equiripple*, unde eroarea, în acest caz în banda de trecere, oscilează între un maxim și un minim, iar extremele locale ale răspunsului în frecvență coincid cu limita superioară și cea inferioară a regiunii de toleranță hașurate. Deci, avem un nou parametru ce trebuie specificat: δ_p .

Întrebări importante

- IIR sau FIR?
- Cum se determină coeficienții funcției de transfer?
- Cum se evaluează performanțele filtrului?

47

Odată stabilite specificațiile, iată care sunt întrebările fundamentale pe care ni le punem în problema designului unui filtru. Pentru a răspunde la prima întrebare, trebuie să luăm în considerare avantajele și dezavantajele unui design față de altul.

IIR: PRO și CONTRA

PRO:

- Eficiente computațional
- Se poate obține cu ușurință o atenuare consistentă în banda de oprire
- Recomandate pentru domeniul audio

CONTRA:

- Probleme de stabilitate
- Dificil de proiectat pentru răspunsuri arbitrare
- Faza este neliniară

48

Iată argumentele și contra-argumentele în cazul IIR.

FIR: PRO și CONTRA

PRO:

- Totdeauna stabile
- Există tehnici de proiectare optimală
- Pot fi proiectate cu faza liniară

CONTRA:

- Mult mai scumpe din punct de vedere computațional
- Din punct de vedere acustic, ele ar putea „suna” strident, neplăcut

49

Iată argumentele și contra-argumentele în cazul FIR.

Despre metodele de proiectare ale filtrelor

- În general, determinarea gradelor N și M ale polinoamelor, respectiv determinarea coeficienților a_k și b_k , pentru a fi respectate specificațiile cerute, este o problemă neliniară dificilă
- Metode consacrate:
 - IIR: conversia proiectării analogice
 - FIR: proiectarea optimală minimax (Parks-McClellan)

50

Găsirea gradului și a coeficienților polinoamelor implicate în funcția de transfer este o problemă foarte grea.

În cazul filtrelor IIR, există o vastă literatură despre designul filtrelor, care datează încă din vremea electronicii discrete și care a fost adaptată când s-a trecut la proiectarea filtrului digital.

Filtrele FIR, pe de altă parte, sunt entități pur digitale care nu există în lumea analogică. Tehnicile de proiectare pentru filtrele FIR au fost dezvoltate de la zero, încă de la începutul procesării semnalului digital. Au atins apogeul la începutul anilor 70, cu tehnica de proiectare optimală a filtrelor Parks-McClellan.