

CURSUL 10

UN EXEMPLU DE FILTRARE ÎN DOMENIUL TIMP ȘI ÎN DOMENIUL FRECVENȚĂ .
ÎN CĂUTAREA CELEI MAI GENERALE TRANSFORMĂRI LINIARE ȘI INVARIANTE ÎN
TIMP REALIZABILE.

ECUAȚII CU DIFERENȚE CU COEFICIENȚI CONSTANȚI.

ÎNMULȚIREA POLINOAMELOR ȘI CONVOLUȚIA.

DEFINIREA TRANSFORMATEI Z. PROPRIETĂȚI FUNDAMENTALE.

FUNCȚIA DE TRANSFER A UNUI SDLIT REALIZABIL.

CALCULUL FUNCȚIEI DE TRANSFER PENTRU FILTRUL *LEAKY INTEGRATOR*.

REGIUNEA DE CONVERGENȚĂ (RC) A TRANSFORMATEI Z. OBSERVAȚII.

RC PENTRU SDLIT CAUZALE. FUNCȚIA DE TRANSFER, ZEROURILE ȘI POLII.

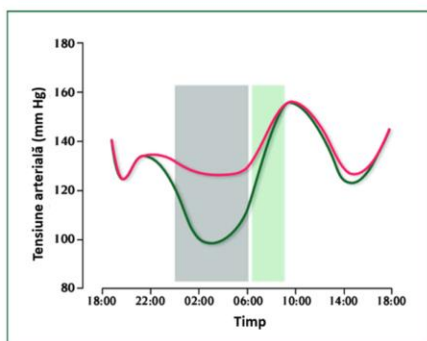
UN CRITERIU SEMPLU DE STABILITATE.

TRANSFORMATA Z ȘI RC, PENTRU UNELE SEMNALE UZUALE.

1

În cursul precedent am introdus noțiunile de SDLIT, identificând și filtrele cu aceste tipuri de sisteme. Am definit răspunsul la impuls și am stabilit că acesta caracterizează complet sistemul. Am definit convoluția, i-am pus în evidență principalele proprietăți și am studiat algoritmul numeric prin care se calculează. Am demonstrat teorema convoluției. Am dat clasificări ale filtrelor funcție de comportamentul lor în domeniul timp (FIR, IIR, cauzale și non-cauzale) și domeniul frecvență (trece-jos, trece-sus, trece-bandă și trece-tot). Am discutat despre BIBO – stabilitatea filtrelor și am demonstrat un rezultat fundamental cu privire la aceasta. Am analizat, pe rând filtrul trece-jos ideal, filtrele trece-sus și trece-bandă, ca variante derivate din primul. Am dat un exemplu de utilizare a filtrării trece-jos la demodularea unui semnal modulat sinusoidal. Astăzi urmează să discutăm despre subiectele din slide și intrăm imediat în conținutul cursului.

Exemple de măsurători



2

Să presupunem că efectuăm măsurători ale unei mărimi care are o variație lentă, caracterizată de o anumită netezime a reprezentării sale grafice, fără vârfuri care să evidențieze variații bruște.

FIGURA 1

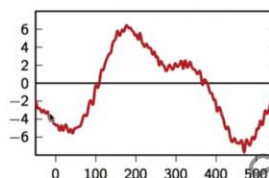
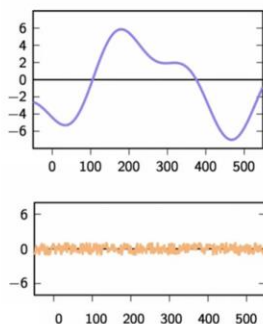
De exemplu, tensiunea arterială a unei persoane, pe parcursul a 24 de ore, la intervale mici de timp, în așa fel încât eșantioanele să fie suficient de apropiate pentru a da impresia continuității graficului.

FIGURA2

Sau, un alt exemplu, numărul de accesări/oră al unei publicații online de cultură, pe o perioadă de un an.

Exemplele pot continua. Am dat și noi suficient de multe exemple, până acum, pe parcursul orelor de curs.

Un scenariu tipic de filtrare



3

Considerăm un exemplu oarecare, dat de reprezentarea din figură (vedeți prima figură).

Datorită procesului de măsurare sau al celui de transmisie a datelor (motivele pot fi nenumărate), valorile pot fi corupte de o formă de zgomot aditiv oarecare, care poate fi ușor percepută de destinatarul informațiilor ca fiind o cantitate străină, care sigur perturbă valorile reale ale mărimii măsurate (urmăriți a doua figură).

Adică, ceea ce obținem în cele din urmă, în loc de curba netedă a primului panou, este o curbă în care observi cu ușurință că există mișcări foarte rapide, pe care le interpretezi ca fiind acel zgomot (a treia figură).

Întrebarea care se pune este dacă putem procesa aceste date ca pe un semnal în timp discret, astfel încât majoritatea zgomotului să fie îndepărtată și să obținem o reprezentare conformă cu așteptările noastre de „netezime”.

Micșorarea efectelor zgomotului folosind medierea mobilă

- ▶ **Idee:** înlocuirea fiecărui eșantion cu o medie dintre valoarea sa și cele ale eșantioanelor anterioare din imediata sa vecinătate
- ▶ **De exemplu:** $y[n] = (x[n] + x[n - 1])/2$
- ▶ **Sau mult mai general:**

$$y[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} x[n-k]$$

4

Prima idee este de a înlocui fiecare eșantion din secvență cu o medie locală. Mediile sunt bune, de obicei, atunci când vrei să elimini variațiile aleatorii, despre care nu știi prea multe.

Este ceva de genul: „Măi băiete, tu poți să faci un salt, dacă ții neapărat, dar nu unul exagerat. Ci doar atât cât îți dictează media celor de dinaintea ta.”

Se poate considera, spre exemplu, media simplă, în două puncte, a eșantionului curent și a eșantionului trecut. S-ar putea, însă, ca media în două puncte să nu fie suficientă pentru a elimina majoritatea zgomotului.

Și astfel, în general, am putea utiliza medii mai lungi, luând în considerare media eșantioanelor din M puncte (anterioare, plus punctul curent).

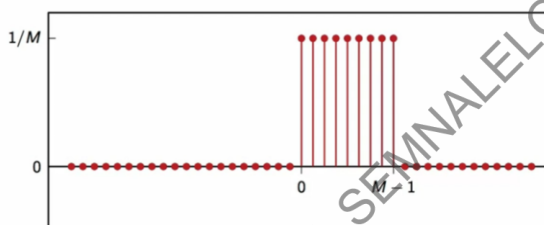
Dacă facem asta experimental, putem vedea imediat că strategia funcționează odată cu creșterea numărului de eșantioane M . Sigur, însă, va exista și un preț plătit...

Filtrul cu mediere mobilă – domeniul timp

Răspunsul filtrului la impuls:

$$h[n] = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} \delta[n-k]$$

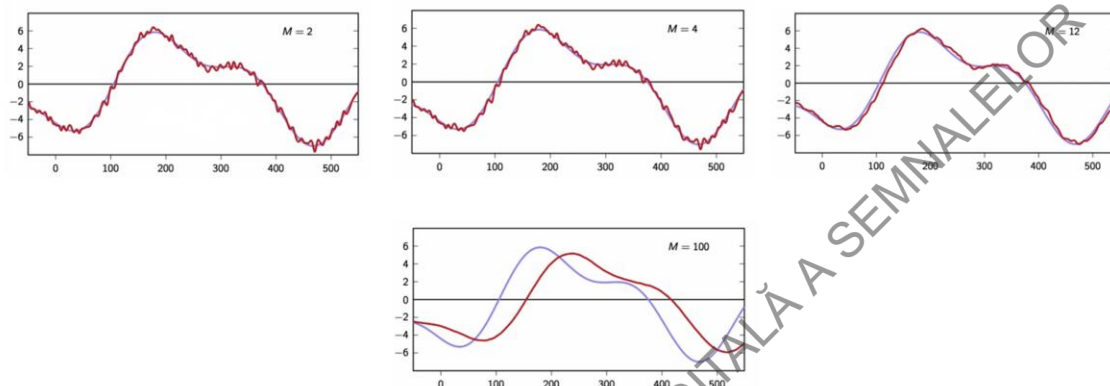
$$= \begin{cases} 1/M & \text{pt } 0 \leq n < M \\ 0 & \text{în rest} \end{cases}$$



5

Am văzut, în cursul precedent, cum arată răspunsul la impuls (funcția pondere) a unui filtru cu mediere mobilă. Este ușor de văzut că avem de a face cu un filtru cauzal de tip FIR, așa cum am subliniat la momentul potrivit.

Iată care este rezultatul în domeniul timp:



Iată care sunt rezultatele obținute în domeniul timp, în cazul considerat, utilizând acest tip de filtru.

Dacă luăm doar media pe două puncte, vedem că efectele nu sunt spectaculoase. Puteți observa: cu albastru - semnalul original, iar cu roșu - ieșirea filtrată cu o medie pe două puncte.

Pe măsură ce creștem numărul de puncte pe care le folosim pentru a calcula media, putem vedea că începem să eliminăm puțin mai mult din zgomot.

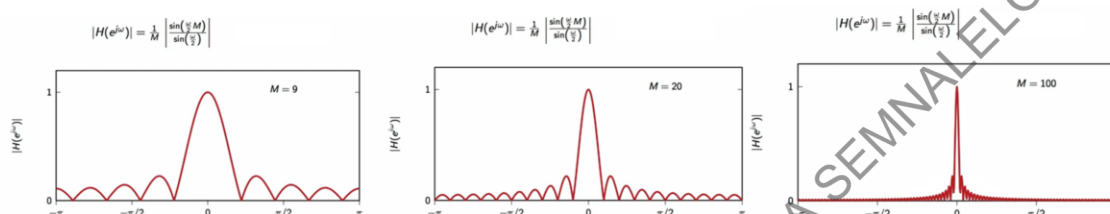
Cu o medie de 12 puncte, spre exemplu, putem deja să vedem că strategia dă roade.

Dacă suntem dispuși să creștem media până, să spunem, la una pentru 100 de puncte, atunci putem vedea clar că semnalul pe care îl culegem la ieșire este unul foarte neted. Vom observa, însă, că, în raport cu semnalul original, ieșirea a fost întârziată. Acesta este prețul pe care îl plătim pentru că folosim un număr mare de eșantioane trecute, pentru a calcula valoarea de ieșire. Deci, într-un fel, acumulăm o anumită întârziere, pentru că facem o medie din trecut.

Ceea ce am învățat experimental, din cele analizate, este că efectul de netezire al filtrului este proporțional cu lungimea M a răspunsului la impuls.

Cum stau, oare, lucrurile în domeniul frecvență?

Filtrul cu mediere mobilă – domeniul frecvență



Dacă luăm în considerare acum amplitudinea DTFT, ea are reprezentarea din figură pentru cazul $M=9$.

Un lucru interesant de reținut este că amplitudinea ia valoarea 0 în toți multiplii de $2\pi/M$, cu excepția lui 0. Așadar vom vedea $(M-1)$ zerouri de-a lungul axei frecvenței.

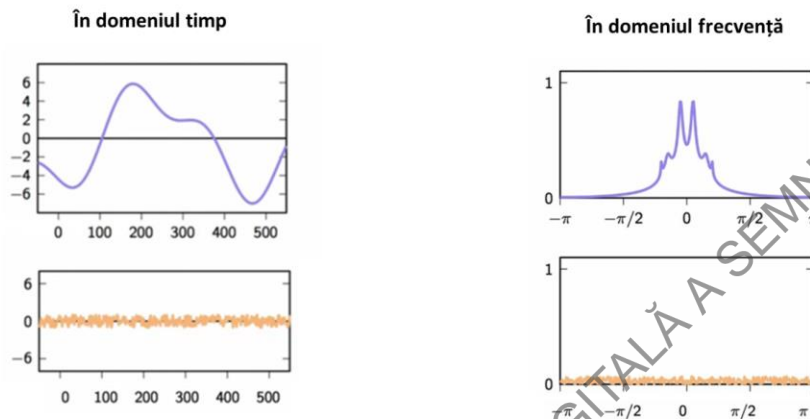
Putem reprezenta grafic răspunsul în amplitudine pentru valori crescătoare ale lui M .

Aici aveți răspunsul în frecvență pentru $M = 20$. Putem număra cele 19 zerouri de-a lungul axei frecvenței.

Apoi aveți răspunsul în frecvență pentru $M = 100$. Se poate observa că răspunsul în frecvență este foarte concentrat în jurul originii, semn clar că avem de a face cu un filtru trece-jos.

Să ne întoarcem la exemplul nostru de reducere a efectelor zgomotului pentru semnalul considerat, pe care l-am studiat până acum în domeniul timp, și să vedem ce se întâmplă în domeniul frecvență.

Paralelă între ceea ce se întâmplă în timp și în frecvență



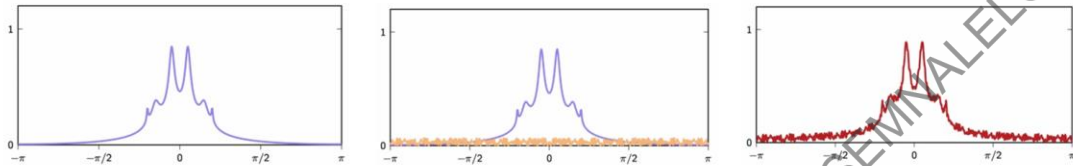
8

Am văzut ce se întâmplă cu semnalul considerat *în domeniul timp*, iar acum analizăm ce se întâmplă *în domeniul frecvență*.

Am avut semnalul inițial (reprezentat în albastru), afectat de un zgomot aditiv (reprezentat aici în portocaliu).

În domeniul frecvență, spectrul semnalului neted arată ca în figură. Cea mai mare parte a energiei sale este concentrată în jurul frecvenței 0, deci este *un semnal de tip trece-jos*. Transformata Fourier în timp discret a zgomotului arată tot ca un zgomot, și în domeniul frecvenței.

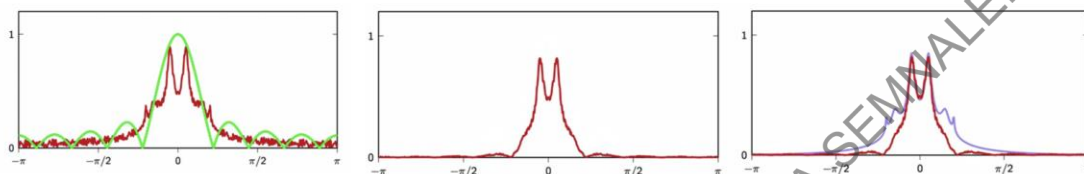
Rezultatul suprapunerii zgomotului



9

Iată ce se obține, în domeniul frecvență, prin suprapunerea spectrului zgomotului peste spectrul semnalului neted.

Ce obținem, ca rezultat în domeniul frecvență, după filtrare?



10

Când folosim o mediere mobilă pentru a filtra zgomotul, în domeniul frecvență **înmulțim** acest spectru (colorat în roșu) cu răspunsul în frecvență al filtrului de mediere mobilă (colorat în verde). Aduceți-vă aminte că în timp ce în domeniul timp aveam *convoluție*, în domeniul frecvență avem *produs* de DTFT-uri.

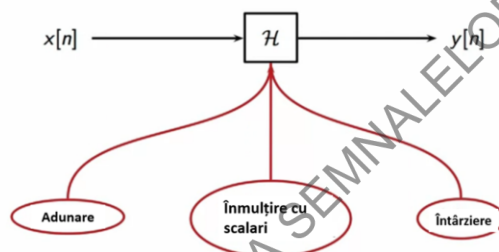
Aici folosim, de exemplu, o medie în $M=9$ puncte, după cum se poate vedea din numărul de zerouri figurate de-a lungul axei frecvenței.

Înmulțirea realizată determină o foarte adâncă atenuare a frecvențelor înalte. Prin urmare, cea mai mare parte a zgomotului care era conținut în aceste benzi a fost eliminată. Ca reprezentare, rezultatul arată ca în figură. Este vizibilă netezirea curbei.

În același timp, însă, dacă comparați rezultatul operației de filtrare cu spectrul original (cel colorat în albastru), vedeți că filtrarea a eliminat părți din spectrul original care aveau tot dreptul să rămână acolo! Aceasta dovedește, încă o dată, că întotdeauna există un preț de plătit, chiar și în procesarea semnalelor. Respectiv, pentru a elimina zgomotul, uneori eliminăm și o parte din ceea ce nu trebuia eliminat.

Cele mai generale SDLIT

- Filtrele ideale, puse în evidență, nu pot fi implementate în practică
- Căutăm cea mai generală transformare liniară și invariantă în timp care poate fi implementată, știind că:
 - Liniaritatea: implică numai adunări și înmulțiri cu scalari
 - Invarianța în timp: presupune numai înmulțiri cu scalari
 - Realizabilitatea: implică un număr finit de eșantioane (trecute sau viitoare)



11

Am văzut că filtrele ideale nu pot fi implementate. O întrebare firească este, așadar, următoarea: care este cea mai generală transformare liniară invariantă în timp pe care o putem implementa în practică?

Știm că liniaritatea implică faptul că putem folosi doar adunări și înmulțiri în algoritmul nostru. Invarianța în timp presupune doar înmulțiri cu scalari, iar realizabilitatea implică utilizarea doar a unui număr finit de eșantioane de intrare și ieșire, trecute sau potențial viitoare.

Aceasta este o reprezentare, pe care o reluăm, pentru a ilustra ceea ce se întâmplă în interiorul unui sistem discret liniar și invariant în timp. Cele trei ingrediente fundamentale sunt, după cum știm, adunarea, înmulțirea cu scalari și întârzierea.

Reprezentarea SDLIT prin ecuații cu diferențe cu coeficienți constanți

$$\sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k]$$

- Utilizează $(M+1)$ valori corespunzătoare intrării și N valori corespunzătoare ieșirii SDLIT.
- Considerăm $a_0 = 1$ (altfel facem o normalizare).
- Sistemul este complet specificat de cei $(M+N+1)$ coeficienți.

12

Din punct de vedere matematic, putem descrie pe deplin funcționarea unui SDLIT printr-o așa-numită *ecuație cu diferențe cu coeficienți constanți*, ecuație pe care o vedem aici în forma sa cea mai generală.

Se utilizează $M + 1$ eșantioane de intrare și N eșantioane de ieșire (aceasta pentru că pe $y[n]$ nu îl cunoaștem). Valorile acestea sunt limitele sumelor din ecuație. Primul coeficient din combinația liniară a eșantioanelor de ieșire este fixat în mod convențional la 1, el fiind coeficientul lui $y[n]$, în caz contrar putându-se renormaliza coeficienții (printr-o simplă împărțire).

Întregul sistem este, deci, complet specificat de cei $M + N + 1$ coeficienți.

Rescriem ecuația sub o altă formă

$$y[n] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] - \sum_{k=1}^N a_k y[n-k]$$

- Exprimarea cauzală a ecuației
- Algoritm de calcul al semnalului de ieșire (al fiecărui eșantion $y[n]$)
- Răspunsul în frecvență = DTFT-ul răspunsului la impuls al sistemului
- Care este, însă, modalitatea optimă de determinare a răspunsului la impuls al sistemului?

13

Putem rearanja această ecuație într-o formă cauzală, exprimând ieșirea $y[n]$ ca o combinație liniară a eșantioanelor de intrare, multiplicată cu coeficienții b_k , din care se scade combinația liniară a eșantioanelor de ieșire anterioare, multiplicată cu coeficienții a_k .

Această expresie cauzală oferă un algoritm pe care îl putem folosi la calculul fiecărei valori a ieșirii, atunci când n variază.

Am văzut, de asemenea, că un SDLIT poate fi complet caracterizat și prin așa-numitul răspuns în frecvență. Iar răspunsul în frecvență este foarte important, pentru că ne furnizează caracteristicile sistemului în domeniul frecvență. Cum calculăm răspunsul în frecvență? Ei bine, el este DTFT-ul răspunsului la impuls al sistemului.

Deci, trecem firesc la următoarea întrebare: cum calculăm răspunsul la impuls al unui sistem, având dată ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți?

Am văzut, în trecut, cum se calculează în mod explicit răspunsul la impuls în cazuri mai simple. Dar, în general, având o astfel de ecuație, calculul răspunsului la impuls în mod explicit este foarte complicat.

Pentru a-l putea face avem nevoie de un nou instrument matematic, numit *transformarea z*. Înainte de a introduce transformarea z , însă, vom face un mic ocol, care poate părea puțin straniu, dar justificarea lui va veni imediat.

Înmulțirea polinoamelor

$$\begin{aligned}(1 + 3t + 2t^2)(2 + t - t^2 + 4t^3) &= 2 + t - t^2 + 4t^3 \\ &\quad + 6t + 3t^2 - 3t^3 + 12t^4 \\ &\quad + 4t^2 + 2t^3 - 2t^4 + 8t^5 \\ &= 2 + 7t + 6t^2 + 3t^3 + 10t^4 + 8t^5\end{aligned}$$

14

Să luăm în considerare problema înmulțirii a două polinoame.

Considerăm că avem două polinoame oarecare și, luând aceste exemple concrete, ne amintim imediat cum se face această operație.

După înmulțiri și ordonarea pe coloane a termenilor de același grad, se face adunarea pe coloane și se obține imediat rezultatul.

Iar rezultatul este ceea ce obținem făcând și convoluția!

$$[\dots 1 \ 3 \ 2 \ 0 \ 0 \ \dots] * [\dots 2 \ 1 \ -1 \ 4 \ 0 \ \dots] = [\dots 2 \ 7 \ 6 \ 3 \ 10 \ 8 \ 0 \ \dots]$$

15

Dacă luăm două secvențe de suport finit în care coeficienții nenuli, începând cu $n=0$, sunt egali chiar cu coeficienții celor două polinoame pe care le-am considerat anterior, și calculăm convoluția lor, vom da chiar peste coeficienții produsului polinomial obținut mai devreme.

Așadar, înmulțirea polinomială și convoluția ne-au condus la același rezultat!

Înmulțirea polinoamelor și convoluția ne dau același rezultat... dacă ne referim la coeficienți

$$p(t) = p_0 + p_1 t + \dots + p_P t^P$$

$$q(t) = q_0 + q_1 t + \dots + q_Q t^Q$$

$$r(t) = p(t) \cdot q(t) = \sum_{n=0}^{P+Q} r_n t^n$$

$$r_n = \sum_{k=\max\{0, n-Q\}}^{\min\{n, P\}} p_k q_{n-k}, \quad 0 \leq n \leq P+Q$$

Presupunem că: $p_n = 0 \quad n \notin [0, P]$ și $q_n = 0 \quad n \notin [0, Q]$:

Produsul polinoamelor:
$$r_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k q_{n-k}$$

Convoluția:
$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] h[n-k]$$

16

În cazul general, date fiind două polinoame de grad P și respectiv Q , produsul lor va fi un polinom de grad $(P + Q)$ și fiecare coeficient din produs poate fi calculat folosind formula din slide.

Acum, limitele acestei sume sîr puțin complicate, dar se poate simplifica acest lucru. Asta dacă evidențiem că toți coeficienții din polinoamele originale $p(t)$ și $q(t)$ sunt egali cu zero atunci cînd indexul este în afara intervalului $[0, P]$, pentru primul polinom, respectiv în afara intervalului $[0, Q]$, pentru al doilea polinom.

Cu această convenție, putem observa că coeficientul numărul n al polinomului obținut prin înmulțire este dat de noua formulă din slide, iar dacă comparăm această formulă cu formula pentru convoluția a două secvențe discrete, vedem că cele două sunt exact la fel.

Acum, de ce este acest lucru important? Ei bine, acum este timpul să introducem transformata z și să evidențiem proprietățile sale.

Transformata z

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]z^{-n}, \quad z \in \mathbb{C}$$

- Unei secvențe în timp discret $x[n]$ i se asociază această serie de puteri (în fapt, un polinom) denumită **transformată z**
- Pentru noi este mai mult un *operator formal*
- ... dar, de asemenea, ea este și o extensie a DTFT la întregul plan complex:

$$X(z)|_{z=e^{j\omega}} = \text{DTFT} \{x[n]\}$$

- Acum notația $X(e^{j\omega})$ are mult mai mult sens.

17

Având o secvență discretă infinită $x[n]$, transformata z asociată acesteia este o funcție complexă de variabilă complexă z , definită prin suma dată în slide.

Putem vedea că, practic, transformăm o secvență discretă într-un polinom, mai precis într-o serie de puteri, având în vedere că indicele n merge de la minus infinit la plus infinit.

Pentru noi aceasta este un operator formal, dar putem vedea că formula seamănă mult cu formula pentru DTFT. Dacă îl înlocuim pe z cu $e^{j\omega}$, observăm că în locul transformării z obținem chiar DTFT-ul lui $x[n]$. Cu alte cuvinte, dacă vom calcula transformarea z pe cercul de rază 1 centrat în originea planului complex, obținem chiar DTFT.

Asta explică de ce folosim notația $X(e^{j\omega})$ pentru DTFT.

Cum transformarea z este o serie de puteri, ar trebui să ne preocupe convergența sa. Amânăm, însă, studiul convergenței transformării z, pentru moment.

Proprietăți fundamentale ale transformatei z

Liniaritate

$$\mathcal{Z}\{\alpha x[n] + \beta y[n]\} = \alpha X(z) + \beta Y(z)$$

Deplasare în timp

$$\mathcal{Z}\{x[n - M]\} = z^{-M} X(z)$$

Convoluție

$$\mathcal{Z}\{h[n] * x[n]\} = H(z)X(z)$$

18

Pentru moment, suntem mai interesați de *proprietățile transformatei z* și vom începe cu cea mai simplă, care este *liniaritatea*. Aceasta este o proprietate foarte ușor de verificat folosind direct definiția.

Dacă avem o combinație liniară a două secvențe discrete și luăm transformarea z a acestei combinații liniare, vom ajunge la același rezultat efectuând combinația liniară a transformărilor z independente.

O altă proprietate foarte importantă, care este imediată, este cea referitoare la *deplasarea în timp*. Rezultatul este cel din slide.

Și, în sfârșit, cea mai importantă proprietate dintre toate este cea referitoare la *convoluție*. Dacă luăm transformarea z a convoluției a două secvențe, aceasta este egală cu produsul transformărilor z individuale. Această proprietate este o extensie a exemplului de înmulțire polinomială, pe care l-am văzut mai devreme.

Convoluția în domeniul complex z și funcția de transfer a sistemului.

Considerăm un SDLIT cu $h[n]$ răspunsul său la impuls

$$y[n] = h[n] * x[n]$$
$$\mathcal{Z}\{y[n]\} = \mathcal{Z}\{h[n] * x[n]\}$$

$\Rightarrow$

$$Y(z) = H(z)X(z)$$

$H(z)$ - funcția de transfer a sistemului

- $H(z)$ este transformata z a răspunsului la impuls al sistemului
- Particularizând $z=e^{j\omega}$, în $H(z)$, obținem chiar răspunsul în frecvență al sistemului.

19

Să ne amintim de problema pe care ne-am pus-o, respectiv să găsim răspunsul în frecvență al unui SDLIT pornind de la ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți. Vrem să vedem cum ne poate ajuta transformata z să facem asta.

Pentru început, dacă avem un SDLIT cu un răspuns la impuls dat de $h[n]$, știm că ieșirea pentru orice intrare dată, $x[n]$, va fi convoluția acesteia cu răspunsul la impuls. Dacă trecem acum la domeniul complex z , aflăm că transformata z a ieșirii va fi transformata z a acestei convoluții. Luând în considerare proprietatea transformatei z ce vizează convoluția, putem exprima transformata z a ieșirii ca produs dintre transformata z a răspunsului la impuls, $H(z)$, și transformata z a intrării, $X(z)$.

Pe $H(z)$ o numim *funcție de transfer a sistemului*. Acum, acest lucru nu este deosebit de surprinzător. Asta pentru că dacă facem, așa cum am spus mai înainte, $z=e^{j\omega}$, obținem chiar răspunsul în frecvență al sistemului.

Problema este că noi nu avem răspunsul la impuls, $h[n]$, al sistemului, ci avem doar ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți, adică descrierea algoritmică a sistemului.

Aplicarea asupra ecuației cu diferențe cu coeficienți constanți a transformatei z

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{Z}\{a_k y[n-k]\} = a_k z^{-k} Y(z) \\
 & \mathcal{Z}\{b_k x[n-k]\} = b_k z^{-k} X(z) \\
 & \sum_{k=0}^N a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^M b_k x[n-k] \quad \Rightarrow \quad Y(z) \sum_{k=0}^N a_k z^{-k} = X(z) \sum_{k=0}^M b_k z^{-k} \\
 & \quad \quad \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{\sum_{k=0}^M b_k z^{-k}}{1 + \sum_{k=1}^N a_k z^{-k}}
 \end{aligned}$$

$a_0 = 1$

20

Dacă vom considera ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți și aplicăm transformata z acesteia, atât în membrul stâng, cât și în membrul drept, putem exploata proprietatea de liniaritate a transformatei z și, respectiv, proprietatea de deplasare în timp a transformării z.

Pentru un termen de forma $a_k y[n-k]$ se obține imediat că:

$$\mathcal{Z}\{a_k y[n-k]\} = a_k z^{-k} Y(z).$$

Similar, pentru un termen de forma $b_k x[n-k]$ se va obține:

$$\mathcal{Z}\{b_k x[n-k]\} = b_k z^{-k} X(z).$$

Fără nicio dificultate, după scoaterea factorilor comuni $Y(z)$, în membrul stâng, respectiv $X(z)$, în membrul drept, care nu depind de k , și ținând cont că am impus $a_0 = 1$, va rezulta imediat relația de calcul pentru $H(z)$.

Câteva concluzii cu privire la funcția de transfer

- Putem obține funcția de transfer, $H(z)$, direct din coeficienții ecuației cu diferențe cu coeficienți constanți
- Funcția de transfer $H(z)$ este una rațională
- Reamintim că **am presupus** că toate transformatele z utilizate există și sunt convergente

21

Observăm că, în acest mod, funcția de transfer a sistemului ne este dată direct din valorile coeficienților ecuației cu diferențe cu coeficienți constanți, fără a mai fi nevoie să cunoaștem răspunsul la impuls al sistemului.

De fapt, se dovedește că funcția de transfer este o funcție rațională, adică este un raport de două polinoame în z , de grad finit, la care coeficienții sunt dați chiar de coeficienții ecuației.

Reamintesc faptul că până acum am presupus că toate transformatele z pe care le-am folosit există și converg! Deocamdată nu ne îngrijorăm în legătură cu acest lucru.

Funcția de transfer pentru *Leaky Integrator*

- Ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți: $y[n] = (1 - \lambda)x[n] + \lambda y[n - 1]$
- Răspunsul la impuls al sistemului: $h[n] = (1 - \lambda)x[n]\lambda^n u[n]$
- Funcția de transfer calculată cu ajutorul definiției transformatei z :

$$H(z) = (1 - \lambda) \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n z^{-n} = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}}$$

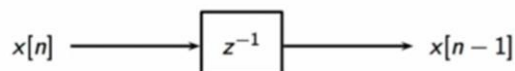
- Funcția de transfer dedusă direct, folosind coeficienții ecuației:

$$Y(z) = (1 - \lambda)X(z) + \lambda z^{-1}Y(z) \Rightarrow H(z) = \frac{1 - \lambda}{1 - \lambda z^{-1}}$$

22

Haideți să revenim asupra filtrului leaky integrator, utilizat de noi, și să vedem cum putem ajunge la funcția sa de transfer.

Vă aduceți aminte de *blocul de întârziere*?



$$Y(z) = z^{-1} X(z)$$

23

Dacă vă aduceți aminte de *blocul de întârziere*, acum înțelegeți și dați sens notației pe care o foloseam atunci.

MARIN BANCOȘ - PRELUCRAREA DIGITALĂ A SEMNALELOR

REGIUNEA DE CONVERGENȚĂ (RC) A TRANSFORMATEI Z

Regiunea de convergență (RC) este zona din domeniul complex în care este asigurată convergența absolută a seriei de puteri:

$$z \in \text{RC} \{X(z)\} \iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| < \infty$$

- RC depinde de valorile pe care le ia $x[n]$
- Pentru funcția de transfer rațională se pot utiliza metode indirecte
- Nu suntem interesați de convergența în zero și infinit

24

După ce am discutat despre transformarea z și după ce am definit funcția de transfer a unui sistem ca fiind transformata z a răspunsului la impuls al sistemului, a venit timpul să ne punem și problema existenței transformatei z . Răspunsul la impuls poate fi o secvență discretă de suport infinit și, prin urmare, transformarea z a unei astfel de secvențe este o serie infinită de puteri, a cărei convergență poate ridica probleme.

Definim *regiunea de convergență* RC pentru o transformată z ca fiind mulțimea de valori, ale variabilei z , în care transformata z converge absolut. Aceasta înseamnă că suma din slide, cu limitele minus infinit și plus infinit, sumă din acele valori absolute, trebuie să fie una finită.

Întrebarea este: cum determinăm regiunea de convergență RC?

În mod clar, regiunea de convergență RC depinde de valorile secvenței $x[n]$. Dar amintiți-vă că suntem interesați de funcțiile de transfer $H(z)$ ale sistemelor, și suntem de asemenea interesați să nu trebuiască să calculăm răspunsul la impulsul $h[n]$ în mod explicit, operațiune foarte dificilă adesea. Vom vedea că pentru o funcție de transfer rațională putem folosi metode indirecte pentru a determina RC. De asemenea, remarcăm că nu ne interesează convergența în zero sau infinit. Acestea sunt puncte limită care nu afectează proprietățile generale de convergență ale transformării z .

REGIUNEA DE CONVERGENȚĂ (RC) – Observația 1

Pentru semnalele discrete de suport finit transformata z converge peste tot (excepție făcând în 0 și/sau ∞)

Să observăm că limitele sumei din definiția transformatei z sunt finite.

$$X(z) = \sum_{n=-M}^N x[n]z^{-n}$$

25

Prima observație pe care o putem face este că dacă avem un semnal discret de suport finit, care în cazul unui răspuns la impuls al unui filtru înseamnă că acesta este de tip FIR, atunci transformata z a semnalului converge peste tot. Aceasta deoarece transformata z este, de fapt, un polinom de grad finit în z , după cum putem vedea din expresia transformatei. Deci, pentru semnale de suport finit, regiunea de convergență este peste tot, excepție făcând 0 și/sau ∞ .

REGIUNEA DE CONVERGENȚĂ (RC) – Observația 2

Regiunea de convergență RC prezintă simetrie circulară.

Într-adevăr, dacă se scrie z în coordonate polare, sub forma $z = ae^{j\theta}$, obținem imediat că:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]z^{-n}| < \infty \iff \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]| |a^{-n}| < \infty$$

26

A doua observație importantă este că RC pentru transformata z va avea întotdeauna o simetrie circulară.

Într-adevăr, dacă îl scriem pe z în coordonate polare, $z = ae^{j\theta}$, și facem înlocuirea sa în suma corespunzătoare analizei convergenței absolute a transformatei z , punând sub sumă valorile absolute $|x[n]z^{-n}| = |x[n]| \cdot |z^{-n}| = |x[n]| \cdot |a^{-n}|$ (asta pentru că $e^{j\theta}$ este de modul 1), putem observa că convergența depinde numai de amplitudinea a , a lui z . Prin urmare, regiunea de convergență va avea simetrie circulară și nu va depinde de faza θ a argumentului.

REGIUNEA DE CONVERGENȚĂ (RC) – Observația 3

Pentru secvențe cauzale în timp discret, regiunea de convergență (RC) se întinde de la un cerc din domeniul complex către ∞ .

Întradevăr, dacă vom considera $z_0 \in RC$ și $|z_1| > |z_0|$, obținem:

$$\sum_{n=0}^{\infty} |x[n] z_1^{-n}| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x[n]|}{|z_1^n|} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x[n]|}{|z_0^n|} \leq \infty$$

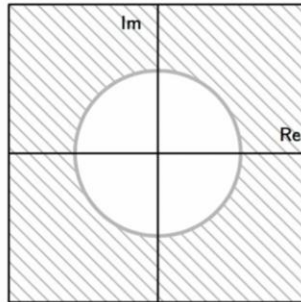
27

A treia observație este că pentru o secvență discretă cauzală, $x[n]$, deci pentru una la care $x[n] = 0$ când n este mai mic decât 0, regiunea de convergență se va extinde de la un cerc către infinit.

De ce de la un cerc? Asta pentru că avem simetrie circulară.

De ce către infinit? Ei bine, să presupunem că avem un punct z_0 în planul complex care aparține deja RC. Alegem orice alt punct z_1 din planul complex, mai mare ca modul decât z_0 , și verificăm dacă transformata z este absolut convergentă și în z_1 . Scriem, pentru aceasta suma valorilor absolute a termenilor din suma transformatei z , pentru noul punct, și observăm că puterile, datorită cauzalității secvenței, sunt doar negative (n fiind mai mare sau egal cu zero). Urmărim raționamentul în formula din slide și observăm că suma ce se obține este majorată de o sumă care este sigur finită, deoarece convergența absolută era asigurată în cazul lui z_0 . Așadar și pentru z_1 este valabilă convergența absolută.

REGIUNEA DE CONVERGENȚĂ (RC) PENTRU SECVENȚE CAUZALE



28

Regiunea de convergență pentru o secvență causală va avea forma din figură. Va exista o graniță circulară undeva în planul complex, convergența fiind asigurată peste tot în afara acestei granițe circulare. Granița aceasta ar putea fi redusă la un punct, respectiv originea, asta dacă transformata z este convergentă în tot domeniul complex.

DETERMINAREA REGIUNII DE CONVERGENȚĂ (RC)

În general, este o problemă dificilă.

Noi, însă, suntem interesați mai ales de cazul funcțiilor de transfer raționale!

29

Dar unde pot exista probleme de convergență? În general, aceasta este o întrebare dificilă, dar cum noi suntem interesați numai de funcții de transfer raționale, adică funcții exprimate prin rapoarte de polinoame în z , într-un astfel de caz problema este oarecum mai simplă.

REGIUNEA DE CONVERGENȚĂ (RC) PENTRU SDLIT CAUZALE

Funcția de transfer, în acest caz, este de forma:

$$H(z) = \frac{b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_M z^{-M}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_N z^{-N}}$$

Ea poate fi întotdeauna factorizată astfel:

$$H(z) = b_0 \frac{\prod_{n=1}^M (1 - z_n z^{-1})}{\prod_{n=1}^N (1 - p_n z^{-1})}$$

zero
pol

30

Amintiți-vă că funcția de transfer pentru un SDLIT este un raport de polinoame de grad finit, cum este aceasta.

O astfel de funcție de transfer, rațională, poate fi întotdeauna luată în considerare ca atare. Determinăm rădăcinile numărătorului și rădăcinile numitorului, iar apoi transformăm numărătorul și numitorul în produse de monoame, fiecare dintre aceste monoame fiind scris cu ajutorul fiecărei rădăcini și a lui z , ca în slide.

Rădăcinile numitorului sunt numite *polii sistemului* descris de funcția de transfer considerată, iar rădăcinile numărătorului sunt numite *zerourile sistemului*,

ZEROURILE ȘI POLII ÎN CAZUL FUNCȚIEI DE TRANSFER PENTRU SDLIT CAUZAL

Notății utilizate:

- z_n — **zero** al funcției de transfer
- p_n — **pol** al funcției de transfer

Zonele cu probleme din domeniul complex, în ceea ce privește convergența, sunt cele ale polilor!

Știm că:

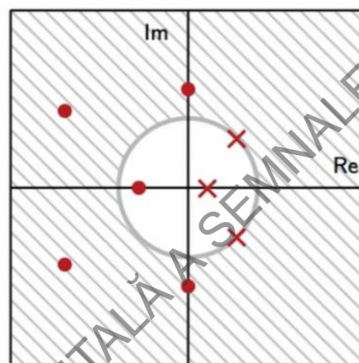
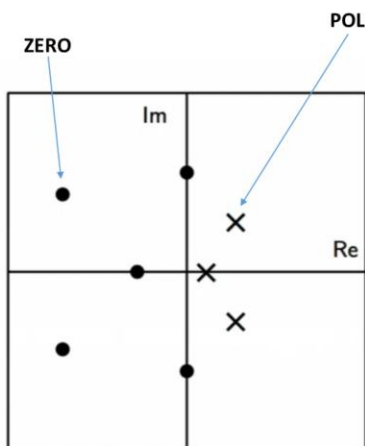
- RC nu poate include polii
- RC se va extinde în exterior, începând de la circumferința cercului cu raza corespunzătoare polului cu modulul de valoare maximă

31

În mod clar, singurele puncte problematice pentru regiunea de convergență sunt polii, pentru că în acele puncte funcția de transfer „explodează”, din moment ce acolo numitorul devine zero. Este clar, așadar, că RC nu poate include polii.

Știm că regiunea de convergență se extinde spre exterior pentru o secvență cauzală. Presupunem că avem un sistem cauzal, astfel încât răspunsul la impuls va fi unul cauzal. De asemenea, știm că RC nu poate include polii. Așadar, este rezonabil să presupunem că, pentru un sistem cauzal, regiunea de convergență se extinde în exteriorul cercului care conține polul cu cea mai mare valoare absolută.

DELIMITAREA RC ÎN DOMENIUL COMPLEX



32

Să luăm un exemplu și să presupunem că factorizăm funcția de transfer, identificând cinci zerouri și trei poli, pentru care facem reprezentările în domeniul complex.

Grafic, convenția este de a reprezenta zerourile ca mici cercuri, ca puncte în planul complex, iar polii cu cruciulițe, cu intersecții de două mici segmente.

Simetriile din reprezentare provin din faptul că rădăcinile complexe sunt complex conjugate, așa cum știm de la algebră, dacă coeficienții ecuațiilor sunt numere reale.

Identificăm polii cei mai îndepărtați de origine, adică polii cu cea mai mare valoare absolută, și trasăm granița circulară, cu centrul în origine, care îi include.

Deci RC pentru sistem, este această zonă hașurată ce se extinde spre exterior acestei granițe circulare.

Determinarea RC pentru sisteme cauzale – argumentarea metodei utilizate

- $H(z) = B(z)(1/A(z))$
- Fără a restrânge generalitatea, presupunem că $B(z)=1$
- Presupunem că toți polii sunt distincți
- Utilizăm descompunerea în fracții simple:

$$H(z) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(1 - p_k z^{-1})} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{c_k}{(1 - p_k z^{-1})}$$

33

Demonstrația este cam plictisitoare, dar vom prezenta lucrurile intuitiv, dând mai mult o argumentație pentru modul de determinare a RC în cazul sistemelor cauzale.

Începem cu funcția de transfer generică, unde $B(z)$ este la numărător, iar $A(z)$ la numitor. Fără a restrânge generalitatea, putem presupune că numărătorul este egal cu 1. Putem face asta, dacă interpretăm funcția de transfer ca fiind obținută prin cascada a două sisteme, primul sistem fiind de funcție de transfer $B(z)$, iar al doilea de funcție de transfer $1/A(z)$.

Ne vom concentra, deci, pe al doilea sistem și pe problema convergenței transformatei z corespunzătoare.

Deci, vom studia convergența pentru o funcție de transfer de forma $1/A(z)$ și vom presupune că toți polii acestei funcții de transfer sunt diferiți. Ea se va scrie sub forma unui produs, ca în slide, iar pentru a-l descompune acest produs într-o sumă putem folosi descompunerea în fracții simple, cu care suntem familiarizați încă din liceu.

Aceasta este o procedură algebrică standard și vom lua un exemplu simplu, doar pentru a vă înprospăta amintirile.

Să ne reamintim:

Exemplu de descompunere în fracții simple

Ne propunem să descompunem în fracții simple funcția rațională:

$$\frac{1}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} &= \frac{1}{(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})} = \frac{c_0}{1 - 2z^{-1}} + \frac{c_1}{1 - 3z^{-1}} = \frac{c_0(1 - 3z^{-1}) + c_1(1 - 2z^{-1})}{(1 - 2z^{-1})(1 - 3z^{-1})} = \\ &= \frac{(c_0 + c_1) - (3c_0 + 2c_1)z^{-1}}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} \Rightarrow c_0 + c_1 = 1 \text{ și } 3c_0 + 2c_1 = 0 \Rightarrow c_0 = -2 \text{ și } c_1 = 3 \end{aligned}$$

Așadar, obținem:

$$\frac{1}{1 - 5z^{-1} + 6z^{-2}} = \frac{-2}{1 - 2z^{-1}} + \frac{3}{1 - 3z^{-1}}$$

34

Hai deți să urmărim pașii de parcurs pentru exemplul considerat. Frația originală va fi descompusă în suma a doi termeni de gradul întâi, și fiecare termen va capta unul dintre polii fracției originale.

Să continuăm argumentația...

Am văzut cum ajungem în cazul lui $H(z) = 1/A(z)$ de la un produs, la o sumă de fracții simple, obținând

$$H(z) = \prod_{k=0}^{N-1} \frac{1}{(1 - p_k z^{-1})} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{c_k}{(1 - p_k z^{-1})}$$

- Fiecare termen corespunde unei secvențe exponențiale

$$\mathcal{Z}\{p_k^n u[n]\} = \frac{1}{(1 - p_k z^{-1})}$$

- RC pentru termenul k este $|z| > |p_k|$
- Intersecția tuturor RC este dată de $|z| > |p_{\max}|$

35

Revenim la funcția noastră de transfer, de forma $1/A(z)$. Presupunem că toate rădăcinile lui $A(z)$ sunt distincte și astfel putem trece de la un produs, la o sumă de termeni.

Găsim coeficienții c_k , așa cum am reamintit că se face.

Fiecare termen din sumă, ce corespunde câte unui pol, va corespunde în domeniul timp unei secvențe exponențiale definită de valoarea polului.

RC pentru fiecare dintre acești termeni k este dată de $|z| > |p_k|$.

Intersecția tuturor acestor RC va fi dată de $|z| > |p_{\max}|$, unde $|p_{\max}| = \max\{|p_k|\}$.

Astfel, problema determinării RC, în cazul unei astfel de funcții de transfer, este rezolvată.

Când apar poli multipli...

- Pentru poli multipli, lucrurile se complică.
Spre exemplu, pentru pol dublu utilizăm:

$$\mathcal{Z}\{np^n u[n]\} = \frac{pz^{-1}}{(1-pz^{-1})^2}, \quad RC: |z| > |p|,$$

dar rețeta va rămâne, în principiu, aceeași.

- Am putea utiliza o transformată z inversă pentru a obține $h[n]$...

36

Argumentația pentru un caz mai general devine mai complicată, atunci când trebuie să luăm în considerare poli care au un ordin de multiplicitate mai mare decât unu, dar esența rămâne aceeași.

Putem demonstra, de exemplu, relația din slide, utilizată pentru poli de ordin doi.

Am putea utiliza o transformată z inversă pentru a obține $h[n]$, dar acest lucru nu este neapărat util din moment ce putem folosi ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți pentru aflarea funcției de transfer, iar noi de la aceasta pornim.

Un criteriu simplu de stabilitate

Se consideră un filtru al cărui răspuns la impuls este $h[n]$.

- **filtrul este BIBO – stabil** $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$
- **$1 \in RC$** $\Leftrightarrow \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h[n]| < \infty$ (pentru că $H(z)$ converge absolut în $z=1$)

Un sistem cauzal este stabil, dacă și numai dacă RC include cercul de rază egală cu unitatea.

37

Faptul că putem determina RC în cazul unui filtru, fără a fi nevoie să calculăm în mod explicit răspunsul acestuia la impuls, ne oferă și un criteriu de stabilitate pentru filtru, care este unul extrem de util și foarte simplu.

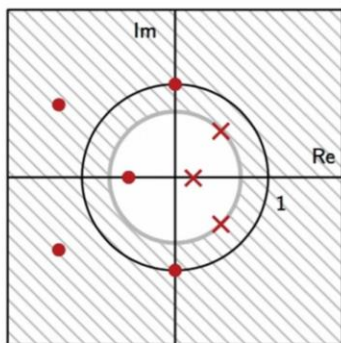
Știm că o condiție necesară și suficientă pentru ca un filtru să fie stabil, este că răspunsul la impuls al filtrului să fie absolut sumabil.

Acum, dacă punctul $z=1$ aparține RC a transformatei z a răspunsului cauzal la impuls, $h[n]$, asta înseamnă că răspunsul la impuls este absolut sumabil.

Deci, o condiție necesară și suficientă pentru stabilitatea filtrului cauzal este ca punctul $z=1$ să aparțină regiunii de convergență RC.

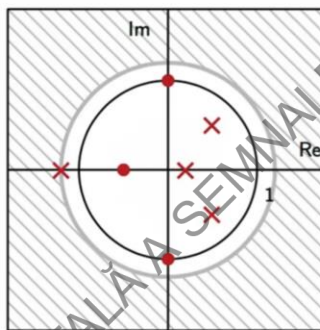
Cum regiunea de convergență are simetrie circulară, asta echivalează cu a spune că întregul cerc de rază 1 aparține regiunii de convergență RC.

Sistem stabil



Toți polii se află în interiorul cercului de rază 1

Sistem instabil



Cel puțin un pol se află în exteriorul cercului de rază 1

38

Un alt mod de a privi lucrurile:

Din moment ce regiunea de convergență pentru un filtru cauzal se întinde spre exterior din cercul care conține polul cu cea mai mare valoare absolută, o condiție necesară și suficientă ca filtrul să fie stabil este ca toți polii filtrului să se afle în interiorul cercului de rază 1.

În prima figură, avem un exemplu în care toți polii sunt în interiorul cercului de rază 1. Regiunea de convergență RC include cercul unitar și, deci, filtrul este stabil.

Dacă unul dintre poli este în afara cercului de rază 1, atunci cercul nu face parte din regiunea de convergență și filtrul este instabil.

Desigur, pentru filtrele care nu au poli, RC include întotdeauna cercul de rază 1, iar asta confirmă încă o dată stabilitatea filtrelor FIR.

O confuzie care se face frecvent

- Considerăm ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți:

$$y[n] = 2y[n-1] + x[n]$$

- Aplicăm transformata z ecuației, ca pe un operator formal, și obținem:

$$Y(z) = 2z^{-1}Y(z) + X(z) \Rightarrow H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1-2z^{-1}}$$

Deoarece $H(1) = -1 < \infty$, putem oare concluziona că sistemul descris de această ecuație este unul stabil?

39

Se pune următoarea problemă... din slide.

ATENȚIE, ÎNSĂ:

Ecuația considerată descrie, în mod evident, un sistem instabil. Aceasta deoarece, la fiecare pas, ieșirea se înmulțește cu 2 și deci răspunsul la impuls este o secvență în creștere exponențială cu baza egală cu 2.

Unde este greșeala?

Clarificarea confuziei

RC depinde de $h[n]$, și nu de o valoare formală a lui $H(z)$ într-un punct:

- $h[n] = 2^n u[n]$
- la aplicarea în ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți a transformatei z , ca pe un operator, se presupune că o facem pentru valori din RC
- RC este în acest caz $|z| > 2$, deoarece avem o serie geometrică (luăm cazul mai general, care acoperă cazul nostru particular pentru $a=2$):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a^n z^{-n} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - (a/z)^{N+1}}{1 - (a/z)} = \begin{cases} \frac{1}{1 - az^{-1}}, & |z| > |a| \\ \infty & \text{în rest} \end{cases}$$

40

Să urmărim explicațiile din slide...

Cu alte cuvinte...

Funcția $\frac{1}{1-az^{-1}}$ este definită pentru $(\forall)z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$

DAR

ea poate fi o transformată z **numai** pentru $|z| > |a|$, care este regiunea de convergență.

41

Greșeala făcută de noi a fost de a obține direct, din ecuația cu diferențe cu coeficienți constanți, funcția de transfer a sistemului și de a o identifica automat cu transformata z a răspunsului la impuls a sistemului, fără a lua în considerare regiunea de convergență RC.

Rețineți, totdeauna **transformata z se consideră împreună cu regiunea de convergență** pe care ea există.

Noi am considerat $H(z)$ pentru $z=1$, punct care nu aparține, de fapt, regiunii de convergență RC!

Transformata z și RC pentru unele semnale uzuale

	Semnal $x[n]$	Transformată Z $X(z)$	RC
1.	$\delta[n]$	1	întreg planul z
2.	$u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$ z > 1$
3.	$n \cdot u[n]$	$\frac{z^{-1}}{(1-z^{-1})^2}$	$ z > 1$
4.	$a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z > a $
5.	$n \cdot a^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z > a $
6.	$-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$ z < a $
7.	$-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$ z < a $
8.	$\frac{(n+k-1)!}{n!(k-1)!} a^n u[n]$	$\frac{1}{(1-az^{-1})^k}$	$ z > a $
9.	$(\cos \omega_0 n) u[n]$	$\frac{1-z^{-1} \cos \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$
10.	$(\sin \omega_0 n) u[n]$	$\frac{z^{-1} \sin \omega_0}{1-2z^{-1} \cos \omega_0 + z^{-2}}$	$ z > 1$

42

Dăm în tabel câteva semnale discrete uzuale, împreună cu transformatele lor z și RC-ul corespunzător.

CÂTEVA CONCLUZII

43

Am început cursul cu un exemplu relevant pentru înțelegerea a ceea ce înseamnă filtrarea în domeniul timp și în domeniul frecvență.

Am reamintit că un SDLIT, și implicit orice filtru, nu poate conține decât : adunări, înmulțiri cu scalari și întârzieri. În plus, dacă un astfel de sistem este și cauzal, ieșirea sa este o funcție liniară a valorilor prezentă și trecute ale intrării și, respectiv, a valorilor trecute ale ieșirii. Astfel de sisteme pot fi reprezentate în domeniul timpului printr-o ecuație cu diferențe cu coeficienți constanți.

Apoi am introdus un instrument matematic necesar pentru a reprezenta SDLIT: transformarea z . Ea este definită ca o serie de puteri și reprezintă o extensie a DTFT la întregul plan complex. Am evidențiat proprietățile sale și, de asemenea, am studiat condițiile de convergență ale transformatei z .

Pe scurt, am văzut că:

- zerourile (respectiv polii) sunt rădăcinile numărătorului (respectiv numitorului) funcției de transfer raționale
- regiunea de convergență este determinată doar de valoarea absolută a polilor
- transformata z a unui sistem SDLIT cauzal se întinde în tot domeniul complex, spre exterior, începând de la polul cu cea mai mare valoare absolută
- un SDLIT este stabil dacă regiunea de convergență include cercul unitar.